



## به روزرسانی مدل اجزا محدود توربین گاز با استفاده از نتایج تست مودال و استخراج مدل اتصال پره به دیسک

کاوه عباسی<sup>1\*</sup>، علی صیامی<sup>2</sup>، بابک خدابنده‌لو<sup>3</sup>، مسعود آسایش<sup>2</sup>

1- استادیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد اسلام آباد غرب، اسلام آباد غرب  
2- فارغ التحصیل کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، پژوهشگاه نیرو، تهران  
3- دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه علوم و فنون نروژ، تورندهم، نروژ  
\* اسلام آباد غرب، صندوق پستی 67617-83146، k.abbasi@iau-ea.ac.ir

### اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل  
دریافت: 02 اسفند 1396  
پذیرش: 01 اردیبهشت 1397  
ارائه در سایت: 21 اردیبهشت 1397

کلید واژگان:

مدل سازی اجزا محدود  
به روز رسانی مدل  
توربین گاز  
آنالیز مودال  
دیاگرام کمپل

### چکیده

مدل اجزا محدود دقیق یک ابزار کارآمد در تحلیل‌های ارتعاشی است. در استفاده از مدل‌های اجزا محدود دینامیک سازه توجه به این نکته ضروری است که مدل باید بتواند به صورت دقیق مقادیر دلخواه مانند فرکانس‌های طبیعی را پیش‌بینی کند. برخلاف تحلیل‌های استاتیکی بیش تخمین نمودن مقادیر و استفاده از ضرایب اطمینان در مقادیر پیش‌بینی شده، در دینامیک سازه، محلی از اعراب نخواهد داشت؛ بدین معنا که در تحلیل‌های ارتعاشی می‌بایست مقدار دقیق مشخصه‌های سازه، مانند فرکانس طبیعی، استخراج گردد. با توجه به این مطلب، بنا کردن مدل قابل اطمینان در دینامیک سازه همواره محل بسیاری از پژوهش‌ها تحلیل‌های ارتعاشی بوده است. در پژوهش حاضر تلاش می‌گردد تا با استفاده از نتایج تجربی، مدل اجزا محدود قابل اطمینانی برای یک ردیف از یک نمونه از توربین رولزرویس، استخراج گردد. در این مسیر خواص جنس دیسک و اتصال بین دیسک و پره با استفاده از نتایج تجربی اصلاح و به‌روزرسانی شده است. همچنین تلاش شده است تا روشی جدید پیشنهاد شود تا اتصال دیسک و پره مدل سازی و به‌روزرسانی شود. در نهایت مدل اجزا محدود اصلاح شده را می‌توان جهت تحلیل‌های بعدی سازه، مانند استخراج دیاگرام کمپل آن به کار برد.

## Updating of gas turbine finite element model by experimental modal analysis results and derivation of characteristics of disc/blade joint model

Kaveh Abbasi<sup>1\*</sup>, Ali Siami<sup>2</sup>, Babak Khodabandelo<sup>3</sup>, Masood Asayesh<sup>2</sup>

1- Department of Mechanical Engineering, Eslam Abad-E-Gharb Azad University, Eslam Abad-E-Gharb, Iran

2- Department of Rotating Equipment, Niroo Research Institute, Tehran, Iran

3- Department of Geoscience and Petroleum, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Norway

\* P.O.B. 67617-83146, Eslam Abad-e-Gharb, k.abbasi@iau-ea.ac.ir

### ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper  
Received 21 February 2018  
Accepted 21 April 2018  
Available Online 11 May 2018

#### Keywords:

Finite Element Modeling  
Model updating  
Gas Turbine  
Modal Analysis  
Campbell Diagram

### ABSTRACT

The precise finite element model is an efficient tool for vibrational analysis. It should be mentioned that, in structural dynamic analysis finite element models of system should be able to accurately predict system characteristics such as natural frequencies. Contrary to static analysis, in structural dynamic analysis, it is not possible to overestimate system characteristics or apply safety factor for predicted characteristics; that means that the exact values of system characteristics such as natural frequencies, should be derived in structural dynamic. According to this, constructing a reliable model in the structure dynamic always has great degree of importance in vibrational analysis. In this study, it has been tried to extract a reliable finite element model for a row of a sample turbine of RollsRoyce brand using empirical results. So, the material properties of the disk and the connection between the disk and the blade are corrected and updated using experimental modal analysis results. Also, it has been tried to propose new method to model and update the disk and blade joint. Finally, reliable finite element model could be used for more analysis such as derivation of Campbell diagrams of system.

### 1- مقدمه

اعتمادی یک ابزار مناسب برای استخراج دیاگرام کمپل در تجهیزات دوار است. تکنیک‌های به‌روزرسانی برای اصلاح مدل‌های اجزا محدود دینامیک سازه توسط فریزول و مادرزهد [1] در سال 1998 به‌صورت مدون تبیین گردید. پس از آن بسیاری از این تکنیک‌ها استفاده کردند و آن را بسط دادند. به‌عنوان نمونه عباسی و همکاران [2] در سال 2008 تلاش کردند تا با استفاده از تکنیک‌های به‌روزرسانی روشی برای استخراج پارامترهای اتصال دیسک به

مدل اجزا محدود قابل اعتماد در تحلیل‌های ارتعاشی صنعتی بسیار ارزشمند است. تجهیزات دوار بخش عظیمی از صنایع را به خود اختصاص می‌دهند و در استفاده از آن‌ها همواره می‌بایست به طراحی ارتعاشی توجه نمود. با توجه به تغییر فرکانس طبیعی این سیستم‌ها با تغییر دور کارکرد آن‌ها، اغلب برای تحلیل آن‌ها از دیاگرام کمپل استفاده می‌شود. مدل اجزا محدود قابل

#### Please cite this article using:

K. Abbasi, A. Siami, B. Khodabandelo, M. Asayesh, Updating of gas turbine finite element model by experimental modal analysis results and derivation of characteristics of disc/blade joint model, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 18, No. 05, pp. 236-242, 2018 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

### 2-1- انجام تست مودال دیسک و یک پره

در ادامه دیسک و یک پره مطابق "شکل 3" سرهم شد و آزمون مودال بر روی آن انجام شد. اولین گام در جهت انجام آزمون برقراری اتصال قابل قبول بین ریشه پره می‌باشد. معیار ارزیابی اتصال مشاهده پاسخ فرکانسی مشابه در دو حالت قرارگیری سنسور شتاب‌سنج روی دیسک و روی پره و اعمال ضربه بر روی دیسک بوده است. به عبارت دیگر بعد از برقراری اتصال ابتدا سنسور بر روی دیسک قرار گرفت و با استفاده از آزمون ضربه بر روی دیسک پاسخ فرکانسی دیسک و پره به‌دست آمد. سپس سنسور بر روی پره گذاشته شد و در همان نقطه قبلی بر دیسک ضربه وارد آمد و مجدداً پاسخ فرکانسی مجموعه استخراج شد از مقایسه پاسخ فرکانسی به‌دست آمده در دو نقطه برای مجموعه می‌توان به مناسب بودن اتصال پی برد.

پس از اطمینان از کیفیت اتصال، آزمون مودال در 24 نقطه بر روی دیسک و 7 نقطه بر روی پره انجام شد. تحریک بر روی دیسک قرار گرفت و یک سنسور در نقاط مختلف اندازه‌گیری پاسخ‌ها را ثبت نمود. در ادامه با استفاده از نرم‌افزار آیکتس سیگنال‌های به‌دست آمده جهت استخراج پارامترهای مودال دیسک و پره مورد استفاده قرار گرفت. هشت فرکانس اول مجموعه دیسک و یک پره در این مرحله استخراج گردید.

### 3- مقایسه نتایج مدل‌سازی با نتایج تست

در ادامه نتایج تحلیلی پره، دیسک و مجموعه دیسک و یک پره ارائه می‌گردد و با نتایج به‌دست آمده از تست مقایسه می‌گردد. با توجه به اختلاف موجود بین نتایج تحلیل و تست اجزا، پارامترها و خواص مواد اصلاح می‌گردد. نتایج تحلیل مودال پره در انسیس در ادامه ارائه شده است. استقلال نتایج از مش با ریز کردن مش‌ها بررسی شد. نتایج تحلیل مودال و آزمون مودال تجربی در جدول 1 و در کنار هم برای شش فرکانس اول پره ارائه شده است.

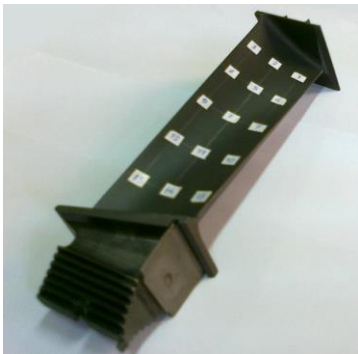


Fig. 2 specified points for modal testing of blade

شکل 2 نقاط مشخص شده برای آزمون مودال



Fig. 3 Disc and a blade connected to it

شکل 3 دیسک و یک پره متصل به آن

پره ارائه کنند. همچنین لوزاک و همکاران [3] تلاش کردند تا با استفاده از نتایج تجربی مدل یک توربین بادی را به‌روزرسانی کنند. به‌دلیل عدم قطعیت متمرکز در رفتار اتصالات در سازه‌ها، بسیاری از تحقیقات به‌روزرسانی بر روی مدل اتصالات متمرکز شده است. به عنوان نمونه شکرالهی و همکاران [4] تلاش نموده‌اند تا روشی را برای به‌روزرسانی مدل اجزا محدود اتصالات ارائه دهند و البته نتایج روش خود را با دیگر روش‌ها نیز مقایسه نموده‌اند. همچنین پورقاسم و همکاران [4] اتصال فلز به کامپوزیت با استفاده از پیچ را به کمک توابع پاسخ فرکانسی به‌روزرسانی کرده‌اند.

در این پژوهش، برای اصلاح مدل دیسک و پره می‌بایست ابتدا اطلاعات تجربی مربوط به این اجزا استخراج گردد. بنابراین ابتدا تست مودال بر روی دیسک و پره به صورت مجزا و یک دیسک به همراه پره انجام شد. در ادامه با استفاده از این نتایج تجربی، مدل اجزا محدود هر یک از اجزا و پره به همراه دیسک اصلاح و به‌روزرسانی شد. برای اصلاح مدل اجزا محدود از روش به‌روزرسانی پایه حساسیت با استفاده از اطلاعات مودال استفاده گردید [1]. جهت استخراج تجربی پارامترهای مودال از آزمون چکش استفاده شد. نرم‌افزار مورد استفاده برای تحلیل اجزا محدود انسیس انتخاب گردید که برای اعمال فرآیندهای به‌روزرسانی بر روی مدل از نرم‌افزار متلب استفاده شد. در ادامه مراحل انجام کار ارائه می‌گردد.

### 2- تست مودال دیسک و پره

روشن است که برای انجام آزمون مودال و به‌دست آوردن پارامترهای مودال، به اندازه‌گیری حداقل یک سطر یا ستون ماتریس تابع پاسخ فرکانسی نیاز است. در مورد دیسک تحت بررسی که در "شکل 1" نشان داده شده است با توجه به نوع سازه و تقارن آن، دو نقطه مجاور برای اندازه‌گیری پاسخ انتخاب گردید و ضربه در سایر نقاط مشخص شده اعمال شد. با بررسی‌های انجام گرفته، احتمال این‌که هر دوی این نقاط نسبت به نقطه تحریک نقطه گره‌ای باشند کم است. پاسخ در نقاط 1 و 2 اندازه‌گیری شد (شکل 1). برای هر نقطه 10 بار پاسخ به ضربه اندازه‌گیری و متوسط‌گیری شد. با توجه به چیدمان سنسورها و جابجایی نقطه تحریک روی دیسک دو سطر از ماتریس توابع پاسخ فرکانسی اندازه‌گیری شد. با استفاده از نرم‌افزار آیکتس<sup>1</sup> براساس نتایج آزمون چکش، مودها و شکل مودها به‌دست آمد.

برای انجام آزمون مودال پره نیز 15 نقطه روی پره در نظر گرفته شد تا بتوان به کمک این نقاط فرکانس‌های مختلف موجود در بازه اندازه‌گیری را مشاهده نمود. در "شکل 2" نقاط اندازه‌گیری بر روی پره نشان داده شده است. نوع آزمایش در این مورد، حالت ضربه ثابت و سنسور متحرک انتخاب گردید.

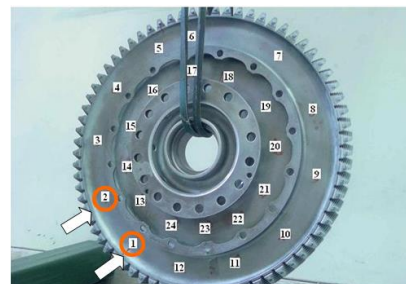


Fig. 1 Investigated disc and points of response measurements

شکل 1 دیسک تحت بررسی و نقاط اندازه‌گیری پاسخ

<sup>1</sup> ICATS

در گام بعدی نتایج تحلیل مودال دیسک در جدول 2 ارائه شده است. مشاهده می‌شود که نتایج به دست آمده از تحلیل با نتایج تست مودال تا حدی تفاوت دارد. با توجه به اینکه در نهایت مدل دیسک و پره به همراه هم مورد تحلیل قرار می‌گیرد در این‌جا تلاش می‌گردد تا حد امکان خطاهای موجود در مدل‌سازی اجزا دیسک و پره حذف گردد. با تغییرات مودال الاستیسیته دیسک و در واقع با اصلاح این پارامتر سعی شده است که نتایج تست و تحلیل حتی‌الامکان به هم نزدیک گردد.

برای اصلاح جنس دیسک، فرکانس طبیعی اول دیسک در سه مقدار متفاوت ضریب کشسانی براساس تحلیل در انسیس، به دست آمده است. نمودار تغییرات فرکانس اول برای سه مقدار مودال الاستیسیته در نمودار "شکل 5" نمایش داده است. براساس این شکل نتایج به دست آمده از مودال الاستیسیته 228 GPa حداقل خطا در مود اول را ایجاد می‌کند.

جدول 2 مقایسه فرکانس‌های طبیعی و تحلیلی دیسک با یکدیگر

**Table 2 Comparison of modal test and analytical modal results of disc**

شماره مود	فرکانس تحلیلی با $E=217\text{Gpa}$	فرکانس تجربی (Hz)	خطای نسبی
مود اول	391	398	1.7
مود دوم	664.3	703	5.5
مود سوم	855	875	2.3
مود چهارم	1060	1099	3.5
مود پنجم	1466	1500	3.6

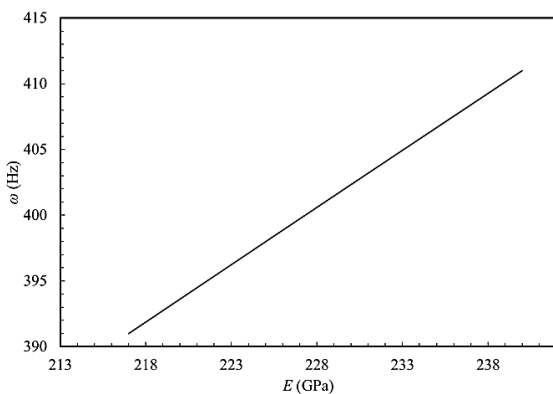


Fig.5 variation of first frequency of disc with variation of elasticity modulus of disc

شکل 5 تغییرات فرکانس اول دیسک با تغییرات مودال الاستیسیته

جدول 3 تغییرات فرکانس طبیعی‌های دیسک با تغییرات مودال الاستیسیته آن

**Table 3 Variation of natural frequencies of disc with changes in module of elasticity of disc**

مود	1	2	3	4	5
نتایج تست مودال	398	703	875	1099	1500
تحلیل با $E=217$	391	664.3	855	1060	1466
خطای نسبی نتایج $E=217$ با تست	-1.7	-5.5	-2.3	-3	-2.9
تحلیل با $E=228$	400.6	681	876	1086	1503
خطای نسبی نتایج $E=228$ با تست	0.6	-3.1	0.11	-1.2	0.2
تحلیل با $E=240$	411	699	899	1114	1542
خطای نسبی نتایج $E=240$ با تست	3.3	-0.6	2.7	1.4	2.8

جدول 1 مقایسه فرکانس‌های طبیعی و تحلیلی پره با یکدیگر

**Table 1 Comparison of modal test and analytical modal results of blade**

شماره مود	نتایج تحلیلی (Hz)	نتایج تجربی (Hz)	خطای نسبی
مود اول	1016.3	1003	1.2
مود دوم	2067.1	2073	0.3
مود سوم	2601	2532	2.7
مود چهارم	4342.5	4428	1.9
مود پنجم	4882	4894	0.2
مود ششم	5143	5057	1.7

با توجه به نتایج ارائه شده در جدول 1 مشاهده می‌گردد که بیشترین خطای موجود بین نتایج تست و تحلیل 2.7 درصد است. بنابراین نتایج به دست آمده از تحلیل مودال پره قابل قبول به نظر می‌رسد.

نتایج تحلیل مودال دیسک در انسیس با خواص اولیه ( $E=217\text{GPa}$ ) در جدول 2 نشان داده شده است. با توجه به خطای نسبی بالای نشان داده شده در شکل به نظر می‌رسد که مدل دیسک نیازمند اصلاح است. برای اصلاح مدل، ابتدا تلاش شد که از هندسه مدل‌سازی اجزا اطمینان حاصل گردد. بدین منظور ابعاد یک مقطع شعاعی از دیسک توسط ماشین اندازه‌گیری مختصات<sup>1</sup> اندازه‌گیری شد و با استفاده از ابعاد به دست آمده دوباره مدل دقیق دیسک باز تولید شد (شکل 4). با استفاده از اندازه‌گیری دقیق ابعادی قطعات و مدل‌سازی هندسه آن‌ها بر مبنای آن، می‌توان خطای ناشی از عدم قطعیت هندسه قطعات را در مدل‌سازی اجزا محدود حذف نمود [7].

از طرف دیگر اطمینان از صحت جنس و چگالی اولیه مواد دیسک وجود ندارد و امکان نمونه‌برداری و تست مواد آن نیز وجود ندارد، بنابراین یکی از منابع عدم قطعیت در نتایج تحلیل دیسک می‌تواند ناشی از خواص مواد آن باشد. با توجه به این‌که هندسه دیسک از لحاظ ابعادی با دقت بسیار خوبی تهیه شد، میزان جرم تحلیلی آن با میزان جرم دیسک که با استفاده از وزنه در آزمایشگاه به دست آمده است متفاوت می‌باشد. جرم واقعی دیسک در آزمایشگاه 26.2 کیلوگرم می‌باشد که با احتساب پیچ‌های بسته شده بر روی آن جرم خالص دیسک حدود 26 کیلوگرم است با توجه به حجم دیسک مدل‌سازی شده، چگالی دیسک  $7980 \text{ kg/m}^3$  می‌باشد و با چگالی اولیه استخراجی از منابع برای جنس دیسک متفاوت می‌باشد و در واقع چگالی دیسک به روزرسانی شده است. لازم به یادآوری است که چگالی اولیه مفروض دیسک  $7980 \text{ kg/m}^3$  بود که با توجه به جنس آن و خواص مذکور در منابع معتبر در نرم‌افزار اعمال گردید.



Fig. 4 disc dimension measurements by coordinate measurement machine (CMM)

شکل 4 اندازه‌گیری ابعاد دیسک با استفاده از ماشین اندازه‌گیری مختصات

<sup>1</sup> Coordinate Measuring Machine

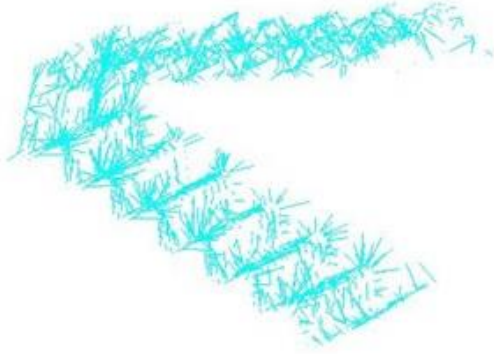


Fig.7 Used element to connect blade to the disc

شکل 7 المان‌های استفاده شده برای اتصال پره به دیسک

متناظر با درجات آزادی انتقالی استفاده گردیده است. لازم به ذکر است که این مدل‌سازی بایستی به نحوی صورت گیرد که امکان اعمال کنترل از طرف کاربر بر روی پارامترهای سختی آن وجود داشته باشد؛ یعنی در صورت نیاز بتوان پارامترهای سختی المان‌های کامبین 7 را تغییر داد و سیستم را مجدداً با استفاده از نرم‌افزار انسیس حل نمود و پاسخ‌های جدید را استخراج نمود. روشن است که در سیستم‌های چند درجه آزادی، سفتی اتصال با فنر در درجات آزادی متناظر با نقاط متصل به هم در ماتریس سختی کلی سیستم ظاهر می‌گردد. با توجه به این مطلب و تعمیم آن برای سیستم اتصال دیسک و پره و با توجه به وجود سه درجه آزادی انتقالی در هر گره و قابل تعریف بودن سختی فنر در راستاهای محلی به طور مجزا، در نهایت در ماتریس سختی سرتاسری سیستم سختی‌های محلی فنر با استفاده از ضرایب زاویه هادی راستای فنر با محورهای سرتاسری قابل تعریف است. اما با نگاهی عمیق‌تر به خواص المان کامبین 7 در محیط انسیس این مطلب روشن می‌گردد که المان مورد بحث به نوعی، یک اتصال است که برای دو نقطه حتی‌المقدور منطبق بر هم (I,I) تعریف می‌گردد و نقطه سوم ( $K$ ) توسط کاربر ارائه می‌شود و راستای آن با دو نقطه اتصال اولیه مشخص‌کننده راستای  $z$  در مختصات محلی است (شکل 8)؛ در صورت عدم ارائه این نقطه توسط کاربر پیش‌فرض نرم‌افزار به نحوی قرار می‌گیرد که راستای محور  $z$  محلی منطبق بر راستای سرتاسری خواهد گردید و در واقع معادل تعریف این المان با توجه به دستگاه مختصات سرتاسری است.

روشن است که نتایج تحلیلی با نتایج تجربی متفاوتند و پارامترهای مدل باید به نحوی اصلاح گردد تا این نتایج حتی‌الامکان به هم نزدیک شوند.

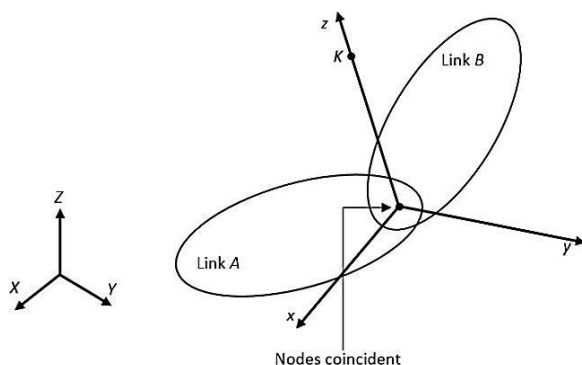


Fig. 8 Characteristics and directions of element of combin7

شکل 8 مشخصات و جهت‌گیری المان کامبین 7

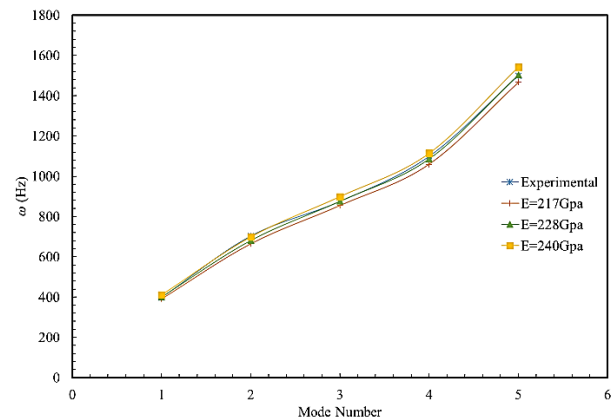


Fig.6 Variation of analytical modes of disc with variation of elasticity modulus of disc and comparison of them with experimental results.

شکل 6 تغییرات مودهای تحلیلی دیسک با تغییر مدول الاستیسیته و مقایسه آن با نتایج تست مودال

فرکانس‌های به‌دست آمده به ازای سه مقدار متفاوت مدول الاستیسیته و تفاوت آن‌ها با مقدار تست در جدول 4 نمایش داده شده است. مشاهده می‌گردد که در کل مجموع قدرمطلق خطاها در حالت  $E=228\text{GPa}$  کمترین مقدار است. بنابراین براساس نتایج ارائه شده در تحلیل‌های بعدی از این مقدار مدول الاستیسیته به‌روزرسانی شده استفاده می‌شود.

#### 4- مدل‌سازی اجزا محدود و به‌روزرسانی آن

##### 4-1- مدل‌سازی اتصال دیسک و پره و استخراج مدل

در ادامه مدل دیسک و یک پره ساخته شد و مورد تحلیل مودال قرار گرفت. برای برقراری اتصال بین دیسک و پره از اتصال صلب استفاده شد که عملاً منجر به افزایش سفتی سازه می‌گردد. با توجه به این‌که در مدل‌سازی مدل اجزا محدود سیستم از لحاظ گرافیکی نهایت دقت به عمل آمده و همچنین جنس مدل نیز به درستی به آن اعمال گردیده است، می‌توان این‌گونه برداشت نمود که عدم قطعیت در مدل‌سازی تکیه‌گاه و محل اتصال پره به دیسک متمرکز است. عدم قطعیت متمرکز در اتصالات در بسیاری از تحقیقات پیش از این مورد توجه قرار گرفته است و راه‌های مختلف برای مدل‌سازی اتصال پیشنهاد شده است [5,4]. در این پژوهش برای برقراری اتصال بین دیسک و پره از المان‌های فنر بین گره‌های سطح اتصال استفاده شده است.

برای برقراری اتصال بین دیسک و پره، در ابتدا با استفاده از کد نوشته شده در محیط نرم‌افزار متلب گره‌های سطح تماس پره و دیسک که دارای حداقل فاصله هستند با یکدیگر جفت شدند و گره‌ها در محل اتصال با استفاده از المان کامبین 7<sup>1</sup> به هم متصل گردیدند؛ "شکل 7" نمایی از المان‌های استفاده شده در محل پره و ریشه در محیط انسیس را ارائه می‌دهد. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌گردد توزیع یکنواخت و گسترده و تعداد بالای فنرها در محل اتصال نشان از نزدیکی این اتصال به اتصال یکپارچه پره و دیسک است.

برای بررسی نحوه بروز پارامترهای اتصال در ماتریس‌های جرم و سفتی مدل، لازم است تا اطلاعاتی در رابطه با المان‌های فنر ارائه گردد. با توجه به این‌که در مدل‌سازی سیستم از المان‌های سالیید استفاده شده است که دارای سه درجه آزادی انتقالی هستند، برای اتصال نیز تنها از پارامترهای سختی

<sup>1</sup> Combin 7

به‌روزرسانی عبارت است از  $k_{xy}$  و  $k_z$  که برای المان کامبین 7 در محیط انسیس قابل تعریف است. در واقع در طی فرآیند به‌روزرسانی این پارامترها هستند که تغییر نموده و نتایج تحلیلی را به نتایج تجربی نزدیک نمایند؛ پس در فرآیند به‌روزرسانی همواره در هر گام بایستی بتوان مقدار جدید این پارامترها را استخراج نمود.

برای نیل به گام بعدی در فرآیند تکرار در ابتدا بایست ماتریس حساسیت را استخراج نمود که برای محاسبه ماتریس حساسیت، با توجه به معادله سیستم ارتعاشی می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial \theta} = \phi_j^T \left[ \frac{\partial K}{\partial \theta} - \lambda_j \frac{\partial M}{\partial \theta} \right] \phi_j \quad (2)$$

روشن است که در این رابطه، ترم مربوط به جرم صفر می‌باشد زیرا ماتریس جرم کلی سیستم مستقل از پارامتر به‌روزرسانی می‌باشد. همچنین ماتریس مودال متناظر با مودهای منتخب در فرآیند به‌روزرسانی از نرم‌افزار انسیس قابل استخراج می‌باشند.

برای محاسبه ماتریس حساسیت بایستی در ابتدا بتوان مشتق ماتریس-های جرم و سختی را نسبت به پارامترهای به‌روزرسانی محاسبه نمود. برای نیل به این هدف می‌توان از چند روش استفاده نمود. یکی از روش‌ها می‌تواند استفاده از فرمولاسیون ماتریس‌های المانی و محلی مورد استفاده در مش‌بندی سیستم باشد. که برای المان‌های پیچیده‌تر معمولاً دسترسی به این فرمولاسیون مشکل است و اگر شکل گرافیکی سیستم پیچیده باشد با توجه به این که در نقاطی مانند سطوح منحنی مدل این ماتریس‌ها با ژاکوبین‌ها دست‌خوش تغییرات پیچیده‌ای می‌گردند استفاده از این روش برای همه جا اندکی مشکل می‌نماید. روش دیگر می‌تواند استفاده از تقریب مرتبه اول مشتق باشد که در صورتی که تغییرات ماتریس‌ها نسبت به پارامترهای به‌روزرسانی خطی باشد این تقریب کاملاً درست و به دور از خطا است.

روشن است که پارامتر به‌روزرسانی فنرها تنها در ماتریس سختی سیستم بروز پیدا می‌کند و مشتق ماتریس جرم نسبت به این پارامترها صفر خواهد بود. پس مشکل تنها محدود به کار با ماتریس سختی می‌باشد. از طرف دیگر بایستی توجه داشت که المان‌های کامبین 7 مورد استفاده برای اتصال پره به دیسک، معادل یک فنر است که بین هر دو گره از این دو بخش قرار می‌گیرد. در اینجا با توجه به این‌که راستای اعمال سختی المان‌های فنر به ماتریس سختی سرتاسری، منطبق بر دستگاه مختصات سرتاسری است، المان‌هایی غیرقطری ماتریس مشتق سختی مثبت و المان‌های قطری آن منفی خواهد بود و با توجه به این‌که ضریب ظهور سختی این المان‌ها در مشتق ماتریس سختی کل یک خواهد بود، این مقادیر در ماتریس سختی به‌صورت یک و منفی یک بروز پیدا خواهد کرد. بنابراین برای تشکیل ماتریس مشتق سختی نسبت به پارامتر به‌روزرسانی می‌بایست در ابتدا نودهایی که باید به هم متصل شوند، استخراج و شماره آن‌ها ذخیره گردد که این عمل در هنگام برقراری اتصال صورت گرفته است؛ در ادامه می‌بایست شماره درجات آزادی متناظر با نودها با توجه به وجود سه درجه آزادی در هر نود استخراج گردد. در نهایت با توجه به مطالب مذکور و با استفاده از خواص المان کامبین 7 و امکانات فراهم شده در محیط متلب، کدی در این محیط نوشته شد که ماتریس پراکنده مشتق سختی کل را نسبت به سختی‌های المانی  $k_{xy}$  و  $k_z$  تشکیل و امکان انجام محاسبات ریاضی بر روی آن و در نتیجه محاسبه حساسیت را فراهم آورد.

با توجه به توانایی نرم‌افزار متلب در تحلیل ماتریسی برای استخراج گام بعدی فرآیند به‌روزرسانی از این نرم‌افزار استفاده گردید و شکل مودها نیز در

در قدم اول برای انجام هر گونه فرآیند به‌روزرسانی بایستی دسترسی به مدل ریاضی فراهم گردد، زیرا به‌روزرسانی به مدل ریاضی اعمال می‌گردد. واضح است که مدل ریاضی معادل یک مدل ارتعاشی، ماتریس‌های جرم و سختی آن است. در این‌جا در ابتدای امر برای استخراج ماتریس‌های سیستم از خود نرم‌افزار انسیس استفاده گردید. نرم‌افزار این امکان را برای کاربر فراهم می‌کند که بتواند ماتریس‌های سیستم را، در فرمت هارول بوئینگ<sup>1</sup> استخراج کند. این فرمت نوعی ذخیره‌سازی برای ماتریس‌های پراکنده است که با استفاده از این فرمت از حداقل حجم حافظه‌ای برای ذخیره‌سازی این پارامترها استفاده می‌گردد. این نحوه ذخیره ماتریس‌ها برای کاهش حجم فضای موردنیاز ذخیره ماتریس‌ها انتخاب می‌گردد. ذخیره ماتریس‌های پراکنده در این فرمت می‌تواند زمان و حجم موردنیاز برای کار با ماتریس‌ها همچون محاسبه مقادیر ویژه را کاهش دهد.

در ادامه با استفاده از کد نوشته شده در محیط نرم‌افزار متلب ماتریس‌ها به محیط این نرم‌افزار منتقل گردیدند. برای انجام عملیات ریاضی با این ماتریس‌ها در محیط نرم‌افزار همچون ماتریس‌های معمولی عمل می‌گردد. لازم به ذکر است طی انجام عملیات ریاضیاتی بر روی ماتریس‌هایی که در این فرمت هستند ممکن است تعداد المان‌های غیرصفر آن‌ها و در نتیجه حجم موردنیاز برای ذخیره‌شان افزایش یابد.

#### 4-2- فرآیند به‌روزرسانی

بیان شد که در این مدل‌سازی عدم قطعیت در محل اتصال دیسک به فنر متمرکز فرض گردید و برای به‌روزرسانی سیستم و نزدیک کردن نتایج آن به نتایج تجربی پارامتر مربوط به این اتصال تنظیم می‌گردد. برای نزدیک کردن نتایج تحلیلی به تجربی همان‌طور که پیش از این نیز آمد بایستی با استفاده از ماتریس حساسیت تغییرات لازم بر پارامتر اعمال و مقدار جدید آن تشخیص داده شود. این فرآیند در یک حلقه تکرار صورت می‌پذیرد تا در نهایت بتوان مقدار صحیح پارامترها را تشخیص داد [6].

پارامتر مرجع منتخب در طی فرآیند اصلاح مدل، مودهای ارتعاشی سیستم است و فرآیند به‌روزرسانی در این‌جا، بر روی به‌روزرسانی پارامترهای تکیه‌گاه متمرکز شده است. در این پژوهش استراتژی مناسب به‌روزرسانی و روش منتخب برای انجام این مهم، روش پایه حساسیت است [6]. روش‌های مبتنی بر ماتریس حساسیت عموماً از گسترش سری تیلور قطع شده اطلاعات مودال برحسب پارامترهای ناشناخته استفاده می‌کنند. این گسترش اغلب به دو ترم اول سری تیلور محدود می‌گردد تا تخمین خطی زیر را فراهم سازد:

$$\delta z = S_j \delta \theta \quad (1)$$

که  $\delta \theta = \theta - \theta_j$  اغتشاش در پارامترهاست،  $\delta z = z_m - z_j$  خطا در خروجی اندازه‌گیری شده است و  $S_j$  ماتریس حساسیت است. در این معادله تخمین جاری پارامتر پس از  $j$  مرحله تکرار  $\theta_j$  است و خروجی بر مبنای این تخمین پارامتر  $z_j$  است. بردار پارامتر  $\theta$  نشان‌دهنده پارامترهای واقعی است که اطلاعات اندازه‌گیری شده را بازسازی می‌کند و طرح تکرار عبارتست از تخمین بهتر که پس از تکرار جاری حاصل می‌گردد. ماتریس حساسیت حاوی مشتق اول مقادیر ویژه و شکل مودها نسبت به پارامترها است که در تخمین پارامتر جاری یعنی  $\theta_j$  مقدار یابی می‌گردد. در این‌جا بایستی بتوان حساسیت مودهای ارتعاشی سیستم نسبت به پارامترهای به‌روزرسانی را استخراج نمود. با توجه به المان‌های منتخب برای اتصال در سیستم مورد بحث پارامتر

<sup>1</sup> Harwell Boeing

<sup>2</sup> Sparse

هستند. حل حداقل مربع خطای با پیش‌ضرب معادله تخمین با استفاده از

سری تیلور قطع شده در  $S^T$  و محاسبه حل در دسترس خواهد بود:

$$\delta\theta = [S^T S]^{-1} S^T \delta z \quad (5)$$

و یا به فرم کامل‌تر:

$$\theta_{j+1} = \theta_j + [S_j^T S_j]^{-1} S_j^T (z_m - z_j) \quad (6)$$

در نهایت با استفاده از رابطه (6) و امکانات و ماتریس‌های فراهم آمده در محیط نرم‌افزار متلب و همچنین با استفاده از ماتریس شکل مودهای حاصل از انسیس در هر بار پارامتر جدید به‌روزرسانی استخراج گردیده و سپس در محیط برنامه‌نویسی انسیس<sup>3</sup> پارامترهای جدید اعمال و مجدداً مسأله بنا نهاده و حل می‌گردد و این فرآیند تا همگرا شدن فرآیند تکرار به یک مقدار معقول و نزدیک شدن نتایج تحلیلی به نتایج تجربی تکرار می‌گردد.

### 5- نتایج و بحث

نتایج به‌دست آمده پس از انجام فرآیند تکرار در مورد این مسأله در جدول 5 ارائه گردیده است. همچنین دیاگرام نرخ همگرایی پارامترها در هر گام تکرار در "شکل‌های 9 و 10" ارائه گردیده است.

همچنین در جدول 5 فرکانس‌های سیستم به‌روزرسانی شده و تجربی در کنار هم ارائه شده است که معیار مناسبی برای مقایسه ارائه می‌دهند. نمودارهای "اشکال 9 و 10" نشان می‌دهد که در خلال فرآیند به‌روزرسانی در گام ششم تکرار، یک نقطه به اکسترمم محلی برای خطا مشاهده می‌گردد که در ادامه تکرار مقدار خطا افزایش یافته و به یک مقدار همگرا می‌شود. با توجه به پایدار شدن پاسخ به فرآیند تکرار در گام‌های 10 الی 14 و ثبات مدل اجزا محدود نسبت به تغییرات سختی، پاسخ گام چهارم برای این سیستم منطقی‌تر به نظر می‌رسد. زیرا از گام دهم فرآیند تکرار عدم واکنش مدل به تغییرات سختی مشاهده می‌گردد. تغییرات سختی سیستم در حین کارکرد توربین و به واسطه شتاب‌های دورانی ممکن است رخ دهد، بنابراین مناسب است سیستم نسبت به این تغییرات پایدار باشد.

در نهایت پارامترهای سختی استخراج شده متناظر با حداقل مجموع مربعات خطا انتخاب گردید و برای مدل‌سازی اتصال بین دیسک و پره برگزیده شد. مقادیر پارامترهای استخراجی عبارتند از  $k_{17}=1476921$  و  $k_{18}=15780052$  که با توجه به انتخاب دستگاه متریک برای مدل‌سازی در محیط انسیس واحد این اعداد نیز نیوتن بر متر می‌باشد. در نهایت پارامترهای سختی با این چیدمان برای مدل‌سازی کل سیستم در محیط انسیس و انجام

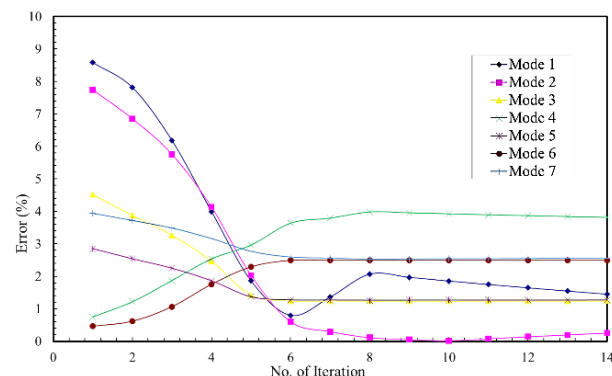


Fig. 9 variation of relative errors of analytical modes during iteration process

شکل 9 نرخ تغییرات خطای مودهای تحلیلی طی فرآیند تکرار

قابل مجموعه فایلهای متنی به محیط این نرم‌افزار انتقال یافتند.

مقادیر ویژه‌های اندازه‌گیری شده بایستی در یک بردار اندازه‌گیری سرهم

شوند. این بردار به فرم زیر خواهد بود:

$$z_m^T = (\lambda_{m1}, \lambda_{m2}, \dots, \lambda_{mr})^T \quad (3)$$

در ادامه بردار مقادیر ویژه تحلیلی متناظر مقادیر اندازه‌گیری شده به صورت بردار پیش‌بینی اندازه‌گیری‌ها سرهم شوند:

$$z^T = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)^T \quad (4)$$

نکته مهم این است که هرآنچه اطلاعات که در  $z_m$  می‌آید بایستی اطلاعات متناظرش در  $z$  نیز وجود داشته باشد. در ادامه با استفاده از ماتریس حساسیت و روش‌های معمول بایستی بتوان مقادیر گام بعدی برای پارامتر به‌روزرسانی را استخراج نمود.

با توجه به ملاحظات طراحی محدوده فرکانسی مطلوب در محدوده 3000 هرتز قرار گرفت و تلاش شده است که مودهای مناسب در این محدوده استخراج و برای انجام فرآیند به‌روزرسانی مورد استفاده قرار گیرند. هشت مود سیستم که تا حد نسبتاً مناسبی دقیق به نظر می‌آیند در این محدوده فرکانسی استفاده گردید. بنابراین روشن است که تعداد مودهای تجربی بیش از تعداد پارامترهای به‌روزرسانی هستند. بایستی دقت داشت که این مودها دقیقاً با مودهای متناظر خود جفت گردند و مقایسه گردند؛ برای نیل به این هدف بایستی از شکل مودها کمک گرفت و دقت نمود که شکل مود متناظر با هر مود فرکانسی تجربی منطبق و مشابه با شکل مود متناظر آن در نتایج تحلیلی باشد. برای جفت کردن مناسب مودها راه‌حلهایی وجود دارد که معمول‌ترین آن‌ها استفاده از معیار ماک<sup>1</sup> است. در جدول 4 مودهای جفت شده تحلیلی و تجربی ارائه گردیده‌اند.

البته بایستی به این نکته نیز توجه داشت که انتخاب گام اولیه برای همگرا شدن به پاسخ در حین انجام فرآیند تکرار در به‌روزرسانی نیز مهم و تأثیرگذار بر کیفیت نرخ همگرایی است. در این‌جا اولین انتخاب برای سختی فنرها به نحوی انتخاب گردید که سختی حاصل از فنرها معادل با خود مواد تشکیل‌دهنده دیسک و پره و بلکه اندکی نرم‌تر از این مواد باشد. یعنی اتصال حاصل از فنرها در گام اول فرآیند تکرار معادل با برقراری اتصال صلب بین دیسک و پره باشد.

با توجه به این‌که تعداد مودهای مورد استفاده در فرآیند به‌روزرسانی از تعداد پارامترهای مجهول به‌روزرسانی بیشترند، معادله تعداد معادلات بیش از تعداد مجهولات به‌دست است و دسته معادلات اصطلاحاً بیش-تعیین<sup>2</sup>

جدول 4 مودهای تجربی و تحلیلی جفت شده به کمک معیار ماک

Table 4 Experimental and analytical modes which are paired by modal assurance criterion

رتبه مود	مودهای تحلیلی (Hz)	رتبه مود	نوع مود	مودهای تجربی (Hz)
1	265.15	1	ترکیبی	271.8
2	372.18	2	ترکیبی	365.8
3	410.3	3	دیسک	398
5	716.2	5	پره	729
6	895.59	6	ترکیبی	876
11	1530.9	10	ترکیبی	1495
18	2177.6	13	ترکیبی	2170

<sup>1</sup> Mode Assurance Criterion (MAC)

<sup>2</sup> Over-determined

<sup>3</sup> APDL (ANSYS Parametric Design Language)

## 6- فهرست علائم

$E$	ضریب کشسانی (Gpa)
$k$	سفتی ( $Nm^{-1}$ )
$K$	ماتریس سفتی ( $Nm^{-1}$ )
$M$	ماتریس جرم (kg)
$S$	ماتریس حساسیت
$z$	ماتریس متغیرهای خروجی به‌روزرسانی

## علائم یونانی

$\theta$	ماتریس متغیرهای ورودی به‌روزرسانی شده
$\lambda$	مودهای سیستم
$\phi$	شکل مودهای سیستم

## بالانویس‌ها

$T$	ترانزاده ماتریس
-----	-----------------

## زیرنویس‌ها

$j$	پارامتر در مرحله تکرار
$m$	پارامتر اندازه‌گیری شده

## 7- مراجع

- [1] J. E. Motterhead, M. I. Friswell, Model Updating In Structural Dynamics: A Survey, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 167, No. 2, pp. 347-375, 1993.
- [2] K. Abbasi, M. Asayesh, M. Nikraves, Boundary Condition Identification of Turbine Blades for Modal Analysis using Finite Element Model Updating, *23<sup>rd</sup> International Power System Conference*, Tehran, Iran, Sep. 3-4, 2008.
- [3] M. Luczak, S. Manzato, B. Peeters, K. Branner, et al., Updating Finite Element Model of a Wind Turbine Blade Section Using Experimental Modal Analysis Results, *Shock and Vibration*, 2014, [684786]. DOI: 10.1155/2014/684786.
- [4] S. Shokrollahi, H. Ahmadian, F. Adel, A new approach for finite element model updating of bolted joints and comparison with interface layer method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 3, pp. 42-35, 2017. (in Persian)
- [5] M. Pour Ghasem, A. Naji Ghazvini, H. Gholparvar, Nonlinear model updating of composite-metal single lab bolted joint using high order response amplitude approximation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 11, pp. 39-46, 2018 (in Persian)
- [6] K. Abbasi, M. Asayesh, M. Nikraves, Comparing of direct and sensitivity-base model updating methods in structural dynamics and its application for updating of cantilever model, *International Mechanical Engineering Congress and Exposition 2008*, Boston, Massachusetts, USA, Oct. 31-Nov. 6, 2008.
- [7] R. Seifi, K. Abbasi, Restoring scraped surfaces of shaft and bearing in interference fit joints by hard chromium plating, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 9, pp. 57-64, 2016 (in Persian)

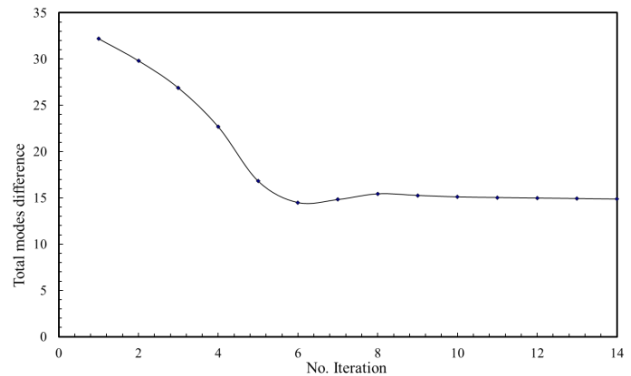


Fig. 10 Variation of summation of absolute value of errors of analytical modes during iteration process

شکل 10 تغییرات مجموع قدرمطلق خطای مودهای تحلیلی طی فرآیند تکرار

جدول 5 مودهای به‌روزرسانی شده و خطای نسبی آن‌ها با مودهای تجربی متناظرشان

Table 5 updated modes and its relative errors with corresponding experimental modes

خطای نسبی (%)	مودهای تجربی (Hz)	مودهای به‌روزرسانی‌شده (Hz)	
2.51	271.8	265.15	1
1.71	365.8	372.18	2
3.00	398	410.3	3
1.79	729	716.2	4
2.19	876	895.59	5
2.35	1495	1530.9	6
0.35	2170	2177.6	7

مابقی تحلیل‌ها با اطمینان بیشتر مورد استفاده قرار گرفت. توجه به این سختی‌ها نشان می‌دهد که راستای  $z$  دارای سختی بالاتر است و این مطلب می‌تواند ناشی از قرارگیری این جهت در راستای شعاعی مختصات محلی باشد. همچنین اعداد سختی‌ها بیان‌گر تفاوت اتصال بین دیسک و پره با اتصال یک‌پارچه این دو جز به هم است. این تفاوت‌ها بیانگر اهمیت به‌روزرسانی مدل اجزا محدود است.

در ادامه می‌توان با استفاده از مدل قابل اعتماد حاصل، تحلیل‌های دیگری در رابطه با توربین را انجام داد؛ به‌عنوان نمونه با استفاده از مدل به‌روز شده می‌توان دیاگرام کمیل مربوط به توربین را استخراج نمود و برای تحلیل‌های بعدی و طراحی سیستم مورد استفاده قرار داد. لازم به یادآوری است که در تحلیل اجزا محدود اثرات ژبروسکوپی نیز مورد توجه قرار گرفته است.