



مدل سازی عددی جریان ورودی به مخزن با بستر خشک با استفاده از الگوریتم پخش موج اصلاح شده

صادق مودی¹، حسین مهدیزاده^{2*}

1- دانش‌آموخته کارشناسی ارشد، مهندسی عمران، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان

2- استادیار، مهندسی عمران، دانشگاه بیرجند، بیرجند

* بیرجند، صندوق پستی 615/97175، hossein.mahdizadeh@birjand.ac.ir

اطلاعات مقاله

مقاله پژوهشی کامل

دریافت: 13 اسفند 1396

پذیرش: 12 فروردین 1397

ارائه در سایت: 30 فروردین 1397

کلید واژگان:

مدل سازی عددی

الگوریتم پخش موج

معادلات آب‌های کم عمق

نرم افزار استار سی دی

چکیده

در این مقاله از یک مدل پخش موج تغییر یافته گودونو برای مدل سازی سقوط جریان آزاد آب بروی سطح خشک استفاده می‌گردد. مدل مورد نظر یک مدل خوش توازن بوده و قادر به رفتار کردن مؤلفه‌های منبع جریان ورودی/خروجی به بستر و همچنین مؤلفه‌های اصطکاک در داخل تفاوت شارهای مجاور روش حجم محدود می‌باشد. علاوه بر این، روش مورد نظر از نوعی سرعت تقریبی جدید ریمان برای پخشیدگی بر روی سطح خشک استفاده می‌نماید. در ابتدا جریان ورودی از کف به مخزن به صورت جت آزاد مورد بررسی قرار می‌گیرد. سپس ورود جریان آب به حالت سقوط آزاد و از وسط و دو کناره مخزن بر روی سطح خشک شبیه سازی می‌گردد. جهت مشخص نمودن اعتبار مدل عددی ارائه شده برای فشارهای غیرهیدرواستاتیک، از یک عدد بدون بعد بر اساس سرعت ورودی، طول دهانه و ارتفاع سقوط استفاده گردیده است. نتایج حاصله از روش عددی معرفی شده با نتایج حاصله از نرم افزار استار سی دی که یک نرم افزار تجاری حل معادلات ناور-استوکس است، مقایسه گردیده است. نتایج عددی نشان می‌دهد که الگوی عددی شار موج معرفی شده با مؤلفه‌های تقریبی جدید سرعت، قادر به شبیه سازی سقوط برای سطح خشک برای محدوده معرفی شده عدد بی بعد می‌باشد.

Numerical Modeling of Water Influx Falling into an Empty Tank using a Modified Wave Propagation Algorithm

Sadegh Moodi¹, Hossein Mahdizadeh^{2*}

1- Department of Civil Engineering, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan, Iran

2- Department of Civil Engineering, University of Birjand, Birjand, Iran

* P.O.B. 615/97175, Birjand, Iran, hossein.mahdizadeh@birjand.ac.ir

ARTICLE INFORMATION

Original Research Paper
Received 04 March 2018
Accepted 01 April 2018
Available Online 19 April 2018

Keywords:

Numerical Modeling
Wave Propagation Algorithm
Shallow Water Equations
STAR-CD software

ABSTRACT

In this paper a modified Godunov-type wave propagation algorithm is utilised for the modelling of falling water wave over a dry bed. The defined numerical model is well-balanced and is capable to treat the influx/efflux source terms and also the friction term within the flux-differencing of the finite volume neighbouring cells. Additionally, the method employs a rather simple HLLC wave speed for the propagation over dry-state. First the efflux flow from the bed of a reservoir is analyzed. Then, the entrance of falling water wave from the middle and edge sides of the reservoir over a dry bottom is simulated. In order to validate the achieved numerical results for the non-hydrostatic pressure situations a dimensionless number based upon the inflow velocity, the slot length and the falling height is introduced. The obtained results of the defined numerical solver are then compared with the numerical prediction of the STAR-CD which is a commercial Navier-Stokes package. The numerical results demonstrate that the introduced flux-wave solver is able to simulate the falling water waves over the dry-state for a given range of the dimensionless number.

1- مقدمه

می‌توان پدیده‌های پیچیده فیزیکی را با دقت قابل قبولی شبیه سازی و بررسی نمود. البته انتخاب روش صحیح مدل سازی و مهارت در ایجاد برنامه‌های مناسب برای هر پدیده، امری لازم و در برخی موارد بسیار پیچیده می‌باشد.

در پژوهش حاضر به بررسی جریان آب هنگام ورود به یک مخزن با بستر خشک و ابعاد مشخص در سه حالت مختلف پرداخته می‌شود. هنگام ورود آب به مخزن، حالت‌های پیچیده‌ای از جریان رخ می‌دهد که از نظر مدل سازی

یکی از چالش‌های مهم در علوم مهندسی، بررسی دقیق پدیده‌های فیزیکی می‌باشد که این امر با توجه به محدودیت‌های آزمایشگاهی و هزینه‌بر بودن آن و همچنین وجود خطا در آزمایش‌ها، به طور صحیح امکان پذیر نخواهد بود. از مؤثرترین و دقیق‌ترین روش‌ها به منظور مدل سازی پدیده‌های فیزیکی، می‌توان به مدل سازی عددی اشاره نمود. با استفاده از مدل سازی عددی

Please cite this article using:

S. Moodi, H. Mahdizadeh, Numerical Modeling of Water Influx Falling into an Empty Tank using a Modified Wave Propagation Algorithm, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 18, No. 04, pp. 705-713, 2018 (in Persian)

برای ارجاع به این مقاله از عبارت ذیل استفاده نمایید:

هیدرولیکی به دلیل وجود مکانیزم‌های مختلف جریان بسیار پیچیده است. هم‌چنین پخش جریان آب در مخزن به روی سطح خشک و وجود اصطکاک سطوح و فشار هوا بر این پیچیدگی می‌افزاید.

در حالت کلی، مدل سازی این‌گونه جریان‌ها تنها با حل معادلات ناویر-استوکس و در حالت سه‌بعدی امکان‌پذیر می‌باشد که بسیار پیچیده و زمان‌بر است. بدین منظور می‌توان از معادلات آب‌های کم‌عمق استفاده نمود. معادلات آب‌های کم‌عمق یک سیستم از معادلات هذلولی در حالت بقا می‌باشند که در تحلیل جریان‌های با سطح آزاد در شرایطی که عمق جریان در مقابل پهنای آن ناچیز است، مورد استفاده قرار می‌گیرند. در حالتی که فرض فشار هیدرواستاتیک برای مساله مورد حل صادق باشد، می‌توان از این معادلات به‌صورت مناسبی به‌جای معادلات ناویر-استوکس استفاده نمود.

جواب‌های عددی بسیار زیادی برای معادلات آب‌های کم‌عمق غیرخطی بر پایه روش حجم محدود در طول سال‌ها گسترش یافته است. کارایی روش‌های نوع گودونو¹ برای تسخیر موج ایستا با استفاده از حل‌کننده‌های ریمان تقریبی اثبات شده است [1,2]. از جمله روش‌های خوب‌موازنه‌شده دیگری که در گذشته پیشنهاد شده‌اند می‌توان به حل‌کننده خوب‌موازنه‌شده پیشنهاد شده توسط اودوسه و همکاران [3] اشاره نمود. لیانگ و مارک [4] نیز روش جدیدی تعریف نمودند که یک مجموعه از معادلات حاکم از پیش‌موازنه‌شده را با استفاده از حل‌کننده ریمان \mathcal{R} حل می‌نماید.

در اینجا از یک نسخه از الگوریتم پخش موج به نام روش موج شار که در [5] تعریف شده است، استفاده می‌شود. این روش برای کنترل مؤلفه‌های منبع در عین حفظ مشخصات بقایی بسیار مناسب می‌باشد. این روش بعدها با استفاده از ترکیبی از حل‌کننده‌های ریمان دقیق و تقریبی به‌منظور برطرف نمودن بعضی محدودیت‌های روش موج شار گسترش یافت [6].

بورداریس و همکاران در سال 2007 روش جدیدی برای شبیه‌سازی جریان‌های مختلط و پدیده‌های مرتبط با آن با استفاده از روش‌های حجم محدود ارائه نمودند [7]. در سال 2010 مهدیزاده و همکاران، جریان خروجی از شبکه فاضلاب اشباع و پخش آن روی سطح خشک و تر و برهم‌کنش آن با جریان سیلاب را با استفاده از معادلات آب‌های کم‌عمق یک‌بعدی مدل‌سازی نمودند. آن‌ها یک سرعت اصلاح‌شده برای موج به‌منظور ایجاد قابلیت شبیه‌سازی روی سطح خشک یا تقریباً خشک ارائه و نتایج حاصل را با نتایج معادلات ناویر-استوکس مقایسه نمودند [8]. آن‌ها در سال 2012 روش آب‌های کم‌عمق را به حالت دوبعدی شامل مؤلفه‌های منبع برای لوله‌ها به‌صورت ورودی یا خروجی، اصطکاک بستر و گرادیان عمق‌سنجی گسترش داده و حل‌کننده شبکه لوله را با جریان سطح آزاد ترکیب نمودند. هم‌چنین پخش جریان ناشی از شکست سد دوبعدی روی سطح خشک و برهم‌کنش آن با دبی خروجی از مجرای ورودی را مدل‌سازی نمودند [9]. کِسروانی و همکاران در سال 2015 با استفاده از معادلات آب‌های کم‌عمق با عمق متوسط، جریان سیلاب را مدل‌سازی نمودند که در آن جریان آب خروجی از مجرا به روی سطح زمین به‌عنوان یک مؤلفه منبع اضافی در نظر گرفته شد. آن‌ها از یک روش تسخیر موج ایستای حجم محدود برای حل معادلات آب‌های کم‌عمق بر روی یک شبکه دوبعدی غیریکنواخت مطابق مدل فیزیکی استفاده و نتایج عددی را با نتایج آزمایشگاهی مقایسه نمودند [10]. حقیقی و همکاران در سال 2016، به مقایسه دو روش لَتنیس-بولتزمن³ و کِرَنک-

نیگلسون⁴ محلی تغییر یافته برای حل معادلات غیرخطی و یک‌بعدی برگر⁵ در حالت گذار پرداختند [11]. معادلات برگر، یک نوع ساده‌شده از معادلات ناویر-استوکس می‌باشند. آن‌ها هم‌چنین در سال 2017، از روش عددی تفاضل محدود به‌منظور حل معادلات حاکم بر شرایط اولیه و مرزی استفاده کردند. سپس با جایگذاری محاسبات انجام‌شده در معادلات اصلی، به شبیه‌سازی جریان میکروپلار در رگ گرفته‌شده مخروطی نامتقارن پرداختند [12]. در همان سال، مودی و همکاران جریان آب ورودی به یک مخزن با بستر مرطوب را بررسی کردند. آن‌ها با استفاده از یک الگوریتم پخش موج اصلاح‌شده و معادلات آب‌های کم‌عمق، این جریان را به‌صورت عددی مدل‌سازی نموده و نتایج را با خروجی‌های نرم‌افزار استار سی‌دی⁶ مقایسه کردند [13]. هم‌چنین مهدیزاده و همکاران با استفاده از معادلات آب‌های کم‌عمق و روش \mathcal{R} برای مدل‌سازی برخورد دو جریان سیلاب در یک مقطع مستطیلی پرداخته و نتایج را با نتایج معادلات ناویر-استوکس مقایسه نمودند [14]. سپس برزگران و همکاران با استفاده از یک روش حجم محدود نوع گودونو و معادلات آب‌های کم‌عمق و معادلات رسوب، به مدل‌سازی رسوب بستر پرداخته و خروجی حل خود را با نتایج آزمایشگاهی مقایسه کردند [15].

هدف اصلی در مقاله حاضر مدل‌سازی یک‌بعدی جریان در داخل مخزن در سه حالت می‌باشد به‌طوری‌که با صرف وقت و هزینه بسیار کمتر، همخوانی قابل قبولی میان نتایج آن با نتایج معادلات پیچیده ناویر-استوکس در حالت سه‌بعدی برقرار باشد. طبق اطلاعات نویسندگان این مقاله، تاکنون معادلات آب‌های کم‌عمق با مدلی که قابلیت شبیه‌سازی جریان را به‌صورت سقوط آزاد بر روی یک سطح خشک داشته باشد، ارائه نگردیده است. تفاوت این پژوهش با مقاله ارائه‌شده در [13] این است که در آن مقاله، پخش جریان آب در یک مخزن با بستر مرطوب ارائه‌شده است. این در حالی است که مشکل اصلی در مدل‌سازی این‌گونه جریان‌ها، در مواجهه با بستر خشک می‌باشد چراکه تعریف بستر خشک با ارتفاع آب صفر امکان‌پذیر نبوده و باعث واگرایی مدل می‌گردد. از دیگر نوآوری‌های این پژوهش این است که برای هرکدام از حالت‌ها، یک عدد بدون بعد بر اساس ارتفاع سقوط، اندازه دهانه ورودی و سرعت جریان ورودی به مخزن تعریف شده است که شرایط اعتبار مدل حاضر را برای فشارهای غیر هیدرواستاتیک نشان می‌دهد. برای این منظور آزمایش‌های مختلفی با تغییر این پارامترها توسط نویسندگان انجام شده است که نتیجه آن‌ها، معرفی یک محدوده برای عدد بی‌بعد می‌باشد به‌طوری‌که اگر مشخصات یک مخزن بعد از محاسبه بر طبق فرمول ارائه‌شده برای عدد بی‌بعد، در این بازه قرار بگیرد، مطابقت بیشتری میان نتایج نرم‌افزاری حل معادلات ناویر-استوکس و برنامه کامپیوتری نوشته‌شده بر اساس معادلات آب‌های کم‌عمق به دست خواهد آمد. به‌منظور واریسی نتایج به‌دست‌آمده در این تحلیل، از نرم‌افزار استار سی‌دی استفاده شد که یک حل‌کننده معادلات ناویر-استوکس می‌باشد. لازم به ذکر است برای مدل‌سازی جریان آزاد توسط معادلات ناویر-استوکس و در روش حجم محدود از الگوریتم واف⁷ استفاده می‌گردد. به‌طور کلی روش مذکور یک تکنیک برای مدل‌سازی مسائل دارای سطح آزاد یا سطح مشترک سیال-سیال می‌باشد. علاوه بر این در اینجا برای مدل‌سازی جریان سطح آزاد بر روی بستر خشک، از سرعت‌های \mathcal{R} ای استفاده گردیده است که نسبت به سرعت‌های

⁴ Crank-Nicolson

⁵ Burger

⁶ STAR-CD

⁷ VOF (Volume of Fluid)

¹ Godunov-type methods

² HLL

³ Lattice-Boltzmann

ارائه شده در [9] از سادگی بیشتر و زمان محاسباتی کمتری برای مسائل مرتبط با سقوط برخوردار می باشد.

در ادامه این مقاله، ابتدا به معرفی معادلات آب های کم عمق و الگوریتم پخش موج پرداخته می شود. سپس روش های اِچ ال ای¹ و موج شار مورد بررسی قرار می گیرند. در انتها نیز سه حالت ورود آب به مخزن بررسی گردیده و نتایج ارائه می شوند.

2- معادلات آب های کم عمق

به طور کلی معادلات آب های کم عمق، بقای جرم و مومنوم را بیان می نمایند. شکل ناهمگن این معادلات را می توان به صورت زیر نوشت [1,2]:

$$U_t + F(U)_x = S, \quad (1-الف)$$

$$U = \begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}, \quad F(U) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix} \quad (1-ب)$$

$$S = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{bmatrix},$$

که U بردار مجهولات، $F(U)$ بردار شار، S بردار مؤلفه های منبع، Φ_1 و Φ_2 مؤلفه های منبع در معادلات پیوستگی و مومنوم، g شتاب ثقلی، u سرعت افقی در عمق متوسط و h و ρ به ترتیب عمق کلی آب و چگالی آب می باشند.

مؤلفه های منبع در معادله (1-ب) به صورت زیر نوشته می شوند [1,2]:

$$\Phi_1 = \omega, \quad (2-الف)$$

$$\Phi_2 = -gh \frac{\partial z_b}{\partial x} - \frac{\tau_{fx}}{\rho} - \omega u_{bed}, \quad (2-ب)$$

که z_b تراز بستر و u_{bed} سرعت افقی در بستر است. هم چنین τ_{fx} تنش برشی بستر در جهت افقی می باشد که عبارت است از: $\tau_{fx} = C_f \rho u |u|/2$ و در آن C_f ضریب اصطکاک بستر و u مانند قبل، سرعت در عمق متوسط می باشد. باید توجه داشت که سرعت محلی افقی در بستر، u_{bed} در سطح جامد و در محل خروج جت، صفر می باشد. بنابراین مؤلفه منبع مومنوم $-\omega u_{bed}$ ، صفر خواهد بود. همان طور که ملاحظه می گردد، در روابط مربوط به آب های کم عمق و مؤلفه منبع، $g = 9.8066 \text{ m/s}^2$ به عنوان شتاب در راستای جاذبه عمل نمی نماید. این بدان معناست که شتاب ثقلی هم در معادله پیوستگی و هم در معادله مومنوم لحاظ می شود که تأثیر آن در موارد مربوط به سقوط آزاد بیشتر مشهود است. به منظور مطالعه دبی خروجی، اطمینان از منفی نشدن عمق و حفظ دقت مدل تحت تأثیر برهم کنش حفره ها، ضروری می باشد.

همان طور که گفته شد، در این پژوهش از الگوریتم پخش موج اصلاح شده استفاده شده است. مزیت این روش در مواجهه با پخش بر روی بستر خشک می باشد. هم چنین این روش مؤلفه های منبع ورودی/خروجی را به سادگی با معادلات پیوستگی ترکیب می نماید.

3- الگوریتم پخش موج و روش های نوع گودونو

الگوریتم پخش موج برای نخستین بار توسط لوک معرفی شد [16,17]. این الگوریتم در مساله ریمان برای محاسبه مجهولات در گام بعدی از روش های حجم محدود نوع گودونو استفاده می نماید. تنها تفاوت میان الگوریتم پخش موج لوک و روش اصلی گودونو این است که در روش لوک، موج های ظاهر شده در جواب های ریمان، دوباره در سلول های مجاور میانگین گیری می شوند در حالی که روش اصلی گودونو از داده های شار در سطح مشترک

¹ HLLC

برای حل سیستم معادلات 1، شکل اصلاح شده ی الگوریتم پخش موج نوع گودونو استفاده می شود که توسط لوک مطرح شد [1]:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (A^+ \Delta U_{i-1/2} + A^- \Delta U_{i+1/2}) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{F}_{i+1/2} - \bar{F}_{i-1/2}) \quad (3)$$

که در آن U_i^n متوسط بردار مجهولات در زمان $t = n\Delta t$ در روش حجم محدود می باشد. U_i^{n+1} مقدار جدید بردار مجهولات در گام زمانی بعدی است. $A^+ \Delta U_{i\pm 1/2}$ نوسانات راست و چپ رونده در جهت x می باشد که با حل مساله ریمان در $x_{i\pm 1/2}$ به دست می آیند. در واقع مؤلفه $A^+ \Delta U_{i-1/2}$ بیانگر به روزرسانی درجه اول گودونو برای موج های راست رونده از مساله ریمان در گوشه $i - 1/2$ می باشد. $A^- \Delta U_{i+1/2}$ نیز به روزرسانی درجه اول گودونو برای موج های چپ رونده در گوشه $i + 1/2$ را نشان می دهد. $\bar{F}_{i\pm 1/2}$ نیز مؤلفه های اصلاح شار می باشند که باعث ایجاد دقت مرتبه دوم می گردند و با حل مساله ریمان در سطح مشترک سلول $x_{i\pm 1/2}$ به دست می آیند. نوسانات راست و چپ رونده را می توان به صورت موج های غیر خطی وارد شونده به سلول $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ به صورت زیر تعریف نمود:

$$A^- \Delta U_{i+1/2} = \sum_{k: S_{k,i-1/2} < 0} \xi_{k,i-1/2},$$

$$A^+ \Delta U_{i-1/2} = \sum_{k: S_{k,i-1/2} > 0} \xi_{k,i-1/2} \quad (4)$$

که $\xi_{k,i-1/2} = S_{k,i-1/2} W_{k,i-1/2}$ شار برای هر یک از m موج متغیرهای بقا می باشد. $W_{k,i-1/2}$ که $k=1,2,3,\dots,m$ و سرعت موج $S_{k,i-1/2}$ برخاسته از سطح مشترک سلول، $i - 1/2$ می باشند. امواج متغیرهای بقا $W_{k,i-1/2}$ را می توان با ضرب ضریب بردار ویژه $\alpha_{k,i-1/2}$ در بردار ویژه به صورت $W_{k,i-1/2} = \alpha_{k,i-1/2} r_{k,i-1/2}$ به دست آورد. بنابراین موج شار به شکل $\xi_{k,i-1/2} = \alpha_{k,i-1/2} S_{k,i-1/2} r_{k,i-1/2}$ درمی آید. شارهای اصلاحی به صورت زیر خواهد بود:

$$\bar{F}_{i-1/2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \left(I - \frac{\Delta t}{\Delta x} |S_{k,i-1/2}| \right) \xi_{k,i-1/2}. \quad (5)$$

که $\xi_{k,i-1/2}$ شار محدود شده با استفاده از محدودکننده های TVD می باشد [18,19]. m تعداد موج ها است که برای معادلات آب های کم عمق یک بعدی برابر با 2 است. I نیز نشان دهنده ماتریس همانی است. برای جزئیات بیشتر به [2,20] مراجعه شود.

حل کننده های ریمان تقریبی مانند روش اِچ ال ای [21] و روش موج شار توضیح داده شده در [8]، به منظور حل الگوریتم پخش موج استفاده شده اند [5,22]. این روش به منظور اعمال مؤلفه های منبع در معادله پیوستگی با سرعت های اصلاح شده به منظور ارتقای کارایی بر روی سطوح خشک یا تقریباً خشک مورد استفاده قرار گرفته است.

4- روش اِچ ال ای برای معادلات آب های کم عمق

روش اِچ ال ای برای اولین بار توسط اینفلد تعریف شد [21]. این روش

بقای مومنوم حضور داشتند و بنابراین در تفاضل شار شرکت داده می‌شدند. مهدیزاده [24] این روش را به منظور کنترل مؤلفه‌های منبع در معادله پیوستگی، ارتقا داد. برای معادلات آب‌های کم‌عمق ناهمگن، مؤلفه‌های منبع شامل مؤلفه منبع خروجی در سطح مشترک $i - 1/2$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$S_{i-1/2} = \left[-\frac{\tau_{fx}}{\rho} - gh_{i-1/2} \frac{\Delta z_b}{\Delta x} \right], \quad (12)$$

که $h_{i-1/2} = (h_i + h_{i-1})$ و $\omega_{i-1/2}$ سرعت ورودی/خروجی در سطح مشترک سلول می‌باشد. مؤلفه $-gh_{i-1/2} \Delta z_b / \Delta x$ نشان‌دهنده خطای عمق‌سنجی می‌باشد که در معادله (1-الف) تعریف شده است. Δz_b در معادله (12) به‌طور تقریبی برابر $(z_{b_i} - z_{b_{i-1}})$ و Δx طول سلول می‌باشد. در روش موج شار، مؤلفه‌های منبع را می‌توان در تفاضل شار سلول‌های مجاور برای محاسبه ساختار موج سهیم نمود. به‌منظور محاسبه موج‌های شار در هر سطح مشترک سلول بایستی بر اساس مؤلفه‌های ورودی/خروجی و مؤلفه‌های منبع در معادله مومنوم، ضرایب مربوطه به دست آیند. با جایگزینی شارها و مؤلفه منبع، موج‌های شار و ضرایب به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\left[\begin{array}{c} h_i u_i - h_{i-1} u_{i-1} - \Delta x \omega_{i-1/2} \\ \left(h_i u_i^2 + \frac{1}{2} g h_i^2 \right) - \left(h_{i-1} u_{i-1}^2 + \frac{1}{2} g h_{i-1}^2 \right) \\ + \Delta x \frac{\tau_{fx}}{\rho} + \frac{1}{2} g (h_{i+1} + h_i) (z_{b_i} - z_{b_{i-1}}) \end{array} \right] = \beta_{1,i-1/2} \left[\begin{array}{c} 1 \\ S_{1,i-1/2} \end{array} \right] + \beta_{2,i-1/2} \left[\begin{array}{c} 1 \\ S_{2,i-1/2} \end{array} \right], \quad (13)$$

ضرایب $\beta_{1,i-1/2}$ و $\beta_{2,i-1/2}$ به شکل زیر بدست می‌آیند:

$$\beta_{1,i-1/2} = \frac{SHLLE_{2,i-1/2} \Gamma_1 - \Gamma_2}{SHLLE_{2,i-1/2} - SHLLE_{1,i-1/2}},$$

$$\beta_{2,i-1/2} = \frac{-SHLLE_{2,i-1/2} \Gamma_1 + \Gamma_2}{SHLLE_{2,i-1/2} - SHLLE_{1,i-1/2}}, \quad (14)$$

که

$$\Gamma_1 = h_i u_i - h_{i-1} u_{i-1} - \Delta x \omega_{i-1/2}, \quad (15-الف)$$

$$\Gamma_2 = \left(h_i u_i^2 + \frac{1}{2} g h_i^2 \right) - \left(h_{i-1} u_{i-1}^2 + \frac{1}{2} g h_{i-1}^2 \right) + \Delta x \frac{\tau_{fx}}{\rho} + \frac{1}{2} g (h_{i+1} + h_i) (z_{b_i} - z_{b_{i-1}}) \quad (15-ب)$$

مقدار $\Delta x \omega_{i-1/2}$ بسته به علامت $\omega_{i-1/2}$ دبی ورودی یا خروجی نامیده می‌شود. پس از آوردن ضرایب $\beta_{1,i-1/2}$ و $\beta_{2,i-1/2}$ می‌توان نوسانات راست و چپ‌رونده را محاسبه نمود.

توجه به این نکته ضروری است که معادلات آب‌های کم‌عمق بر اساس فرض فشار هیدرواستاتیک و چشم‌پوشی از شتاب عمودی بدست می‌آیند. قابلیت این تقریب به اعداد محلی تعیین‌شده بستگی دارد و در نهایت با نتایج یک حل‌کننده معادلات ناویر-استوکس با محاسبه فشار دینامیک، مقایسه می‌شود.

7- شرایط مرزی

یکی از مزیت‌های الگوریتم پخش موج این است که شرایط مرزی را می‌توان به‌سادگی برای بسیاری از مسائل، مشخص نمود. الگوریتم پخش موج با مؤلفه‌های اصلاحی به علت وجود محدودکننده‌ها، یک الگوی پنج‌گره‌ای دارد و بنابراین بایستی در مرزها دو سلول مجازی¹ تعریف نمود. در واقع وجود یک یا دو سلول مجازی، برای روش عددی معرفی‌شده، قابلیت ایجاد جریان ورودی و

به‌سادگی از تجزیه موج‌های شار به امواج به شکل زیر به دست می‌آید:

$$U_i - U_{i-1} = W_{1,i-1/2} + W_{2,i-1/2}$$

$$F(U_i) - F(U_{i-1}) = S_{1,i-1/2} W_{1,i-1/2} + S_{2,i-1/2} W_{2,i-1/2} \quad (6)$$

با جابه‌جایی طرفین روابط بالا امواج $W_{1,i-1/2}$ و $W_{2,i-1/2}$ به دست می‌آیند که می‌توان آن‌ها را به‌طور مستقیم برای محاسبه نوسانات در روش گودونو استفاده نمود. سرعت امواج در روش اِچ‌ال‌ال‌ای با مقایسه سرعت مشخصه و سرعت رو محاسبه می‌شود:

$$S_{1,i-1/2} = \min(u_{i-1} - \sqrt{gh_{i-1}}, S_{Roe1})$$

$$S_{2,i-1/2} = \max(u_i + \sqrt{gh_i}, S_{Roe2}) \quad (7)$$

که سرعت‌های رو برای سطح مشترک سلول $i - 1/2$ به‌صورت زیر به دست می‌آیند:

$$S_{Roe1,i-1/2} = \tilde{u}_{i-1/2} - \sqrt{g \tilde{h}_{i-1/2}}$$

$$S_{Roe2,i-1/2} = \tilde{u}_{i-1/2} + \sqrt{g \tilde{h}_{i-1/2}} \quad (8)$$

که

$$\tilde{u} = \frac{\sqrt{h_{i-1}} u_{i-1} + \sqrt{h_i} u_i}{\sqrt{h_{i-1}} + \sqrt{h_i}}$$

$$\tilde{h} = \frac{1}{2} (h_{i-1} + h_i) \quad (9)$$

روش اِچ‌ال‌ال‌ای یک روش عمق مثبت می‌باشد که می‌تواند برای معادلات آب‌های کم‌عمق همگن مورد استفاده قرار بگیرد. مشکل حل‌کننده اِچ‌ال‌ال‌ای این است که این روش یک روش موازنه‌شده نمی‌باشد. به‌طور مشخص برای معادلات آب‌های کم‌عمق حالت پایدار، این روش نتایج غیرثابت ایجاد می‌کند. لذا باید اصلاحات بیشتری برای ایجاد دقت بیشتر انجام گیرد. برای جزئیات بیشتر به [21,23] مراجعه گردد.

5- روش موج شار برای معادلات آب‌های کم‌عمق

روش موج شار تعریف‌شده در [5] به ما اجازه حل برای شارهای پخش موج را می‌دهد و با استفاده از فرمول‌های تفاضل شار به دست می‌آید:

$$F(U_i) - F(U_{i-1}) = \sum_{k:S_{k,i-1/2}}^{M_w} \xi_{k,i-1/2} \quad (10)$$

در روش موج شار، $\xi_{k,i-1/2}$ به بردارهای ویژه تجزیه می‌شود. بنابراین برای معادلات آب‌های کم‌عمق یک‌بعدی داریم:

$$F(U_i) - F(U_{i-1}) = \alpha_{1,i-1/2} S_{1,i-1/2} \Gamma_{1,i-1/2} + \alpha_{2,i-1/2} S_{2,i-1/2} \Gamma_{2,i-1/2} \quad (11)$$

که $\Gamma_{1,i-1/2}$ و $\Gamma_{2,i-1/2}$ بردارهای ویژه برای موج‌های چپ و راست سطح مشترک سلول $i - 1/2$ می‌باشند. تنها تفاوت میان این روش و حل‌کننده اصلاح‌شده اِچ‌ال‌ال‌ای این است که برای روش موج شار فقط موج‌های شار برای محاسبه موج W در نظر گرفته می‌شوند و موج‌های شار به ترکیب خطی بردارهای ویژه تجزیه می‌شوند. روش موج شار به‌طور تقریبی، بقای می‌باشد. تنها مشکل برای این روش در حالت‌های با سطح خشک یا تقریباً خشک می‌باشد که سرعت‌های رو، جواب‌های غیرفیزیکی می‌دهند. که مشکل در برخی حالت‌ها با انتخاب سرعت اینفلد قابل حل می‌باشد. به‌منظور غلبه کامل بر این مشکل از سرعت پیشنهادشده توسط مهدیزاده [9] استفاده می‌شود که ترکیبی از سرعت‌های ریمان تقریبی و دقیق می‌باشد.

6- لحاظ نمودن مؤلفه‌های منبع در روش موج شار

در الگوریتم‌های پخش موج گذشته [1,5]، مؤلفه‌های منبع تنها در معادلات

¹ Ghost Cell

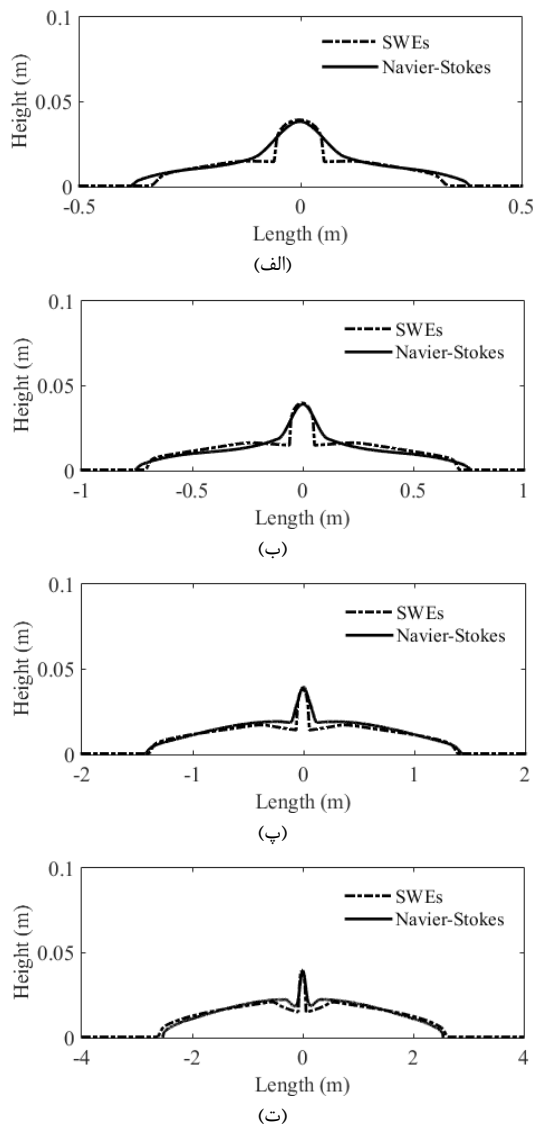


Fig. 1 comparison between results of SWEs and Navier-Stokes equations for flow movement in the tank in case of water entrance from middle and bottom of the bed for a) 0.5, b) 1, c) 2 and d) 4s

شکل 1 مقایسه نتایج حل بر اساس معادلات آب‌های کم‌عمق و معادلات ناویر-استوکس برای حرکت سیال در مخزن در حالت ورود آب از کف و وسط در (الف) 0.5، (ب) 1، (پ) 2 و (ت) 4 ثانیه



Fig. 2 STAR-CD 2D results for the case of water entrance from middle and bottom of the bed with 0.2m/s speed at 0.5s

شکل 2 نتیجه حاصل از نرم‌افزار استار سی‌دی برای ورود آب به مخزن از پایین و وسط با سرعت 0.2 متر بر ثانیه در حالت دوبعدی در 0.5 ثانیه

رابطه زیر محاسبه و در جدول 1 ارائه شده است.

$$NORM = \frac{\sqrt{\sum (y_{Navier-Stokes} - y_{Shallow\ water})^2}}{n} \quad (18)$$

خروجی به محدوده محاسباتی و هم‌چنین دیوار را فراهم می‌نماید. با برون‌یابی مرتبه صفر شرایط مرزی و با برابر قرار دادن U_1 با U_0 و U_1 به صورت معادله (16)، می‌توان به شرایط مرزی غیربازتابی رسید [25]. این به ما اطمینان می‌دهد که هیچ موجی در حل مساله ریمان ایجاد نمی‌گردد. با انعکاس داده‌های داخلی در مرز، یک دیوار مرزی یکپارچه مدل می‌شود.

$$h_0 = h_1, \quad h_{-1} = h_2 \\ (hu)_0 = (hu)_1, \quad (hu)_{-1} = (hu)_2 \quad (16)$$

8- شرایط پایداری

عدد کورانت برای الگوریتم پخش موج یک‌بعدی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Cr = \max(s_{k,i-1/2}) \Delta t / \Delta x \quad (17)$$

به منظور تضمین پایداری مدل، این عدد باید کمتر یا مساوی یک باشد که البته این شرط لازم بوده و کافی نیست.

9- نتایج عددی

در اینجا به بررسی سه حالت کلی جریان آب در یک مخزن مستطیلی روباز پرداخته می‌شود که نتایج عددی حاصل از آن‌ها با نتایج حاصل از حل معادلات ناویر-استوکس در حالت سه‌بعدی -بدست آمده از نرم‌افزار استار سی‌دی- مقایسه می‌گردد. جریان در این نرم‌افزار، سطح آزاد بوده و همان‌طور که در بخش مقدمه ذکر شد، برای تسخیر این سطح آزاد، از روش حجم سیال (و اف) استفاده می‌شود. طبق تعریف، هنگامی که سلول خالی باشد یعنی هیچ سیالی در آن نباشد، $VOF = 0$ و در زمان پر بودن سلول، $VOF = 1$ است. هنگامی که سطح مشترک سیال در سلول وجود داشته باشد، $0 < VOF < 1$ می‌باشد و بنابراین، این مقدار برای هوا و آب به ترتیب برابر صفر و یک و برای سطح مشترک برابر با $VOF = 0.5$ تعریف می‌شود. هم‌چنین از شرایط مرزی غیرلغزشی در مرزهای جامد و مدل آشفتگی $k - \epsilon$ با عدد رینولدز بالا استفاده شده است.

به منظور برقراری پایداری، برای همه حالت‌های مورد بررسی، عدد کورانت برابر $Cr=0.5$ می‌باشد. هم‌چنین برای اجتناب از نتایج غیرفیزیکی، از شرایط آنتروپی هارتن [26] به همراه الگوریتم پخش موج استفاده شده است.

9-1- جریان ورودی به مخزن از کف و وسط

در این حالت جریان آب با سرعت 0.2 متر بر ثانیه از کف مخزن و از فاصله‌ی بین -0.05 تا 0.05 متر وارد می‌شود. در این مساله، عدد خروجی¹ با رابطه $EN = V / \sqrt{gl}$ تعریف شده است که در آن، V سرعت خروجی، g شتاب ثقلی و l طول دهانه می‌باشد که برای این حالت، به صورت $EN = 0.202$ محاسبه می‌شود. تعداد سلول‌های مورد استفاده و ضریب اصطکاک به ترتیب برابر 512 و $C_f = 0.012$ در نظر گرفته شده‌اند. زمان اجرای مدل با پردازنده core i7-3770 و 8 گیگابایت رم، برای معادلات آب‌های کم‌عمق و ناویر-استوکس نیز به ترتیب برابر با 46.46 و 569.80 ثانیه می‌باشد.

شکل‌های (1-الف)، (1-ب)، (1-پ) و (1-ت) مقایسه نتایج حل با استفاده از معادلات آب‌های کم‌عمق و معادلات ناویر-استوکس برای عمق و حرکت سیال در مخزن در زمان‌های مختلف را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌گردد، جت آب از دهانه ورودی به مخزن وارد شده و به صورت متقارن از دهانه دور می‌شود. در 0.5 ثانیه تفاوت اندکی در نتایج معادلات آب‌های کم‌عمق و ناویر-استوکس در میزان حرکت جبهه‌ی آب وجود دارد که این اختلاف در زمان‌های بالاتر به حداقل می‌رسد. هم‌چنین مقدار نرم خطا از

¹ Efflux Number

مختلفی مورد آزمایش قرار گرفتند که به طور کلی در صورتی که $0.13 \leq TMIN \leq 0.36$ باشد، مطابقت مناسبی میان نتایج برقرار خواهد بود.

3-9- جریان ورودی از دو گوشه مخزن

در این حالت آب با سرعت 1 متر بر ثانیه از دو گوشه مخزن هرکدام به فاصله

جدول 2 نرُم خطای مقایسه معادلات آب های کم عمق و معادلات ناویر-استوکس برای حالت ورود آب به مخزن از وسط و بالا

Table 2 Error norm of SWEs and Navier-Stokes equations comparison for the case of water entrance from middle and top of the tank

نرم خطا	تعداد نقاط	زمان (ثانیه)
8.4277×10^{-4}	188	0.5
3.2011×10^{-4}	3301	1
2.3044×10^{-4}	5581	2
1.4896×10^{-4}	9801	4

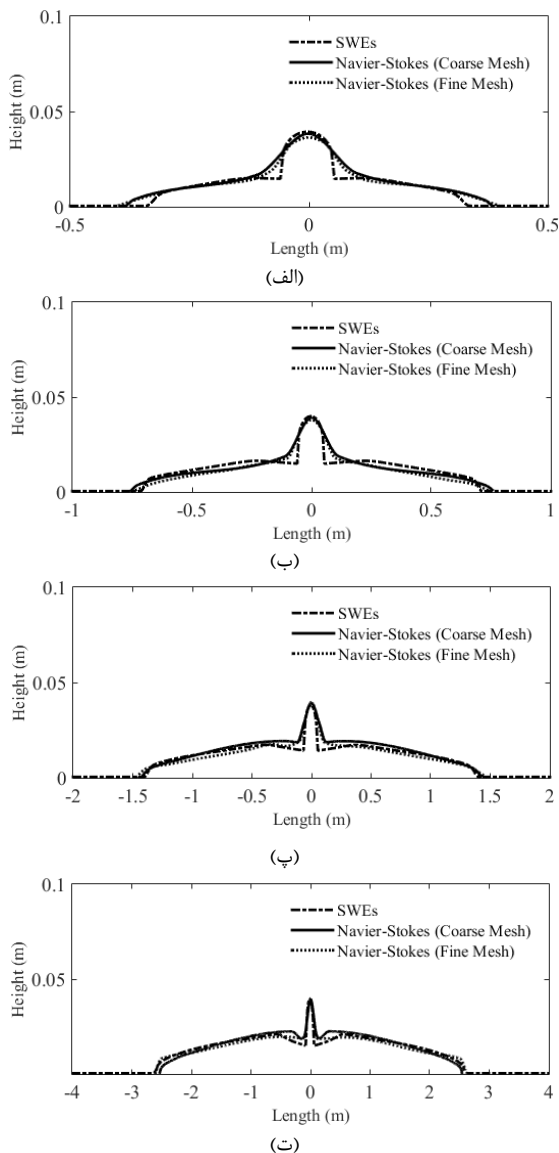


Fig. 3 comparison between results of SWEs and Navier-Stokes equations for section 9-1 case study using the refined mesh

شکل 3 مقایسه نتایج حل بر اساس معادلات آب های کم عمق و معادلات ناویر-استوکس برای مساله بخش 9-1 با مش ریزتر

جدول 1 نرُم خطای مقایسه معادلات آب های کم عمق و معادلات ناویر-استوکس برای حالت ورود آب به مخزن از وسط و کف

Table 1 Error norm of SWEs and Navier-Stokes equations comparison for middle bed efflux

نرم خطا	تعداد نقاط	زمان (ثانیه)
1.2445×10^{-4}	769	0.5
8.1635×10^{-5}	1521	1
5.2174×10^{-5}	2861	2
3.2236×10^{-5}	5082	4

که در آن Navier-Stokes ارتفاع آب در مدل نرم افزار استار سی دی، Shallow water ارتفاع آب در مدل آب کم عمق و n تعداد نقاط می باشد.

همان طور که در شکل و جدول 1 مشاهده می شود، نتایج بدست آمده از نرم افزار با نتایج حاصل از معادلات آب های کم عمق به طور مناسبی مطابقت دارند.

به منظور دستیابی به بهترین عدد برای EN، مدل های مختلفی با $EN = 0.303$ ، $EN = 0.505$ و $EN = 1.01$ آزمایش گردید. با توجه به نتایج می توان گفت در صورتی که $EN < 0.5$ باشد، در همه زمان ها مطابقت محسوسی میان نتایج آب های کم عمق و ناویر-استوکس برقرار می باشد در حالی که برای زمان های خیلی طولانی، $EN > 0.5$ مناسب تر است.

برای اثبات استقلال مدل از شبکه، این بار همین مساله با شبکه های ریزتر¹ با ابعاد $1 \times 40 \times 2000$ مورد بررسی قرار گرفته و حرکت آب به صورت متناظر برای زمان های 0.5، 1، 2 و 4 ثانیه در شکل 3 رسم شده است و نتایج آن با نتایج مدل $1 \times 20 \times 1600$ قبلی و معادلات آب های کم عمق مقایسه گردیده اند.

همان طور که در شکل مشاهده می شود، نتایج بدست آمده با مقدار سلول های ریزتر، تفاوتی را با مش شبکه درشت تر ایجاد نمی نماید که نشان دهنده مستقل بودن نتایج حل کننده معادلات ناویر-استوکس از شبکه می باشد.

9-2- جریان ورودی به مخزن از بالا و وسط

در این حالت، جریان با سرعت 1 متر بر ثانیه در فاصله بین 0.05 تا 0.05 از وسط و بالای مخزن با ارتفاع 0.2 متر، وارد می شود. در اینجا نیز عدد بی بعد ورودی از بالا و وسط² طبق فرمول $TMIN = Vl/h\sqrt{hg}$ تعریف می شود که g و l مانند قبل و h ارتفاع سقوط یعنی ارتفاع مخزن می باشد. طبق مشخصات این مساله $TMIN=0.357$ است. همچنین تعداد سلول های مورد استفاده و ضریب اصطکاک به ترتیب برابر 512 و $C_f = 0.01$ می باشد. زمان اجرای مدل برای معادلات آب های کم عمق و ناویر-استوکس نیز به ترتیب برابر با 54.87 و 451.61 ثانیه می باشد.

شکل های (4-الف)، (4-ب)، (4-پ) و (4-ت) مقایسه پروفیل سطح آب³ حاصل از حل با استفاده از معادلات آب های کم عمق و معادلات ناویر-استوکس در زمان های مختلف را نشان می دهند. همان طور که مشاهده می گردد، در 0.5 ثانیه اختلافی در حدود 0.15 متر در میزان پیشروی جبهه های آب وجود دارد که می تواند ناشی از شتاب ثقلی در اثر سقوط باشد. همچنین در جدول 2 مقادیر نرُم خطا و تعداد نقاط برای زمان های مختلف آورده شده است.

در این حالت نیز با تغییر در مقادیر پارامترهای h و l مدل های

¹ Fine Mesh

² Top Middle Influx Number

³ Water Surface Profile

می باشد که در اینجا دو برابر یعنی مجموع هر دو دهانه بوده و بنابراین ضریب 2 به منظور جبران آن، به مخرج فرمول اضافه شده است. بنابراین مقدار این رابطه برای مساله با مشخصات فوق، برابر با $TEIN = 0.357$ می باشد. همچنین تعداد سلول های استفاده شده و ضریب اصطکاک به ترتیب 800 و $C_f = 0.004$ است. زمان اجرای مدل برای معادلات آب های کم عمق و ناویر-استوکس نیز به ترتیب برابر با 90.61 و 2065.95 ثانیه می باشد. شکل های (6-الف)، (6-ب)، (6-پ) و (6-ت) نتایج مقایسه حل با استفاده از معادلات آب های کم عمق و معادلات ناویر-استوکس و جدول 3 نرم خطا و تعداد نقاط را در زمان های مختلف نشان می دهد. حالت های مختلفی با اعداد بدون بعد متفاوت، مدل سازی گردیدند و طبق نتایج، در صورتی که $0.13 \leq TEIN \leq 0.36$ باشد، همخوانی قابل قبولی میان نتایج وجود خواهد داشت.

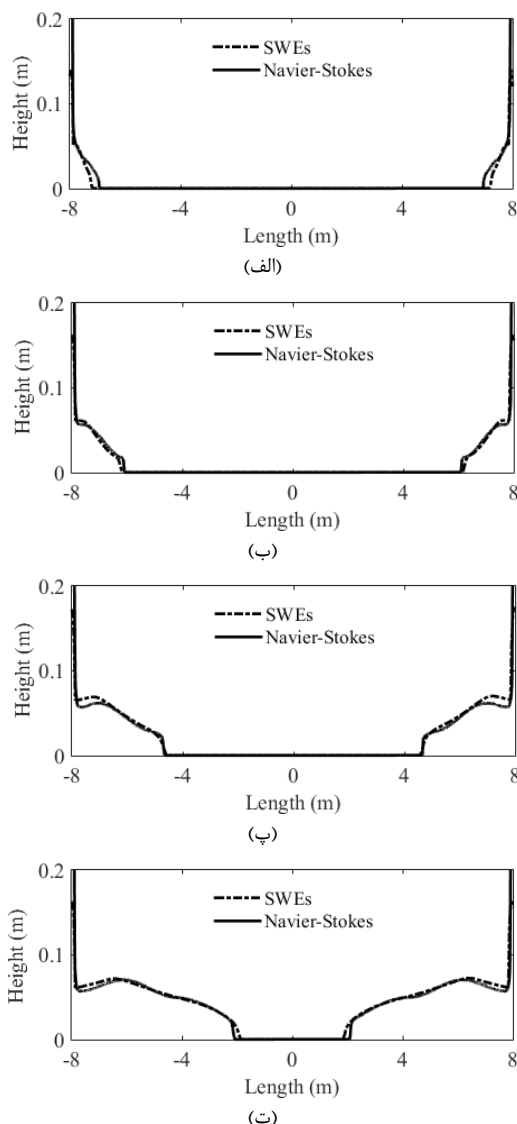


Fig. 6 comparison between results of SWEs and Navier-Stokes equations for flow movement in the tank in case of water entrance from top edges for a) 0.5, b) 1, c) 2 and d) 4s

شکل 6 مقایسه نتایج حل بر اساس معادلات آب های کم عمق و معادلات ناویر-استوکس برای حرکت سیال در مخزن در حالت ورود آب از بالا و کناره ها در (الف) 0.5، (ب) 1، (پ) 2 و (ت) 4 ثانیه

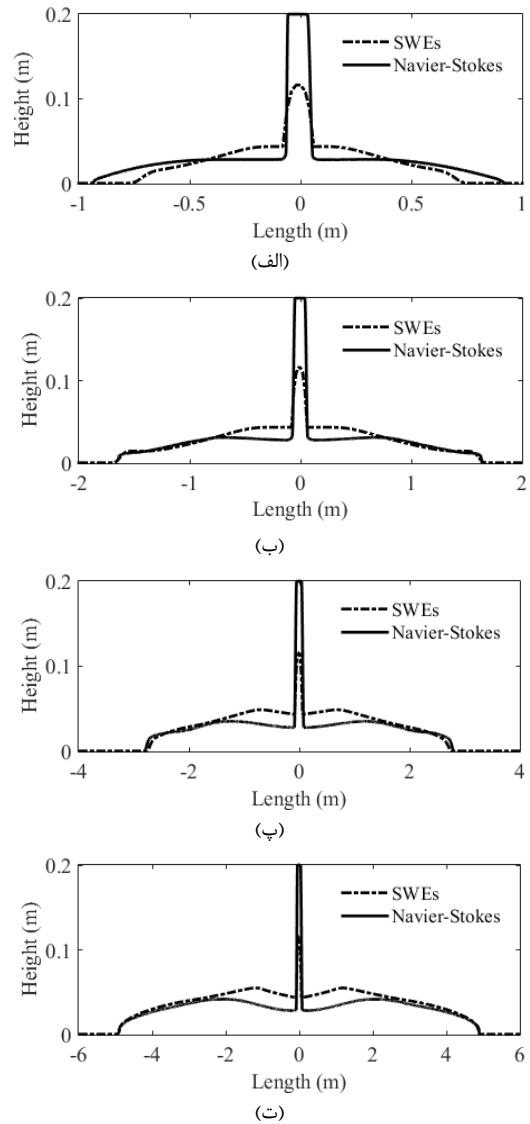


Fig. 4 comparison between results of SWEs and Navier-Stokes equations for flow movement in the tank in case of water entrance from middle and top for a) 0.5, b) 1, c) 2 and d) 4s

شکل 4 مقایسه نتایج حل بر اساس معادلات آب های کم عمق و معادلات ناویر-استوکس برای حرکت سیال در مخزن در حالت ورود آب از بالا و وسط در (الف) 0.5، (ب) 1، (پ) 2 و (ت) 4 ثانیه



Fig. 5 STAR-CD 2D results for the case of water entrance from middle and top of the tank with 1m/s speed at 0.5s

شکل 5 نتیجه حاصل از نرم افزار استار سی دی برای ورود آب به مخزن از بالا و وسط با سرعت 1 متر بر ثانیه در حالت دوبعدی در 0.5 ثانیه

0.1 متر یعنی از -8 تا -7.9 و از 7.9 تا 8 متر از ارتفاع 0.2 متری وارد می گردد. عدد ورودی از بالا و گوشه h^1 به صورت فرمول $TEIN = VI/2h\sqrt{hg}$ تعریف می شود و تفاوت آن با TMIN در پارامتر l

¹ Top Edges Influx Number

آب‌های کم‌عمق در نظر گرفته نشده است و این موضوع با تغییر در اصطکاک به صورت مطلوبی حل گردید.

از دیگر عوامل بروز خطا بایستی به عبارات لزجت و فشار غیر هیدرواستاتیک در نرم‌افزار استار سی‌دی اشاره نمود که ماهیت معادلات آن با معادلات آب‌های کم‌عمق یکسان نمی‌باشند. اما آنچه در سیلاب حائز اهمیت است، مدل‌سازی موج پیش‌رونده¹ بر روی سطح خشک می‌باشد که در این مورد، نتایج حاصله از مدل آب کم‌عمق با نرم‌افزار استار سی‌دی حتی برای شرایطی که عدد بی بعد معرفی شده معتبر نمی‌باشد، کاملاً مشابه است.

اشاره به این نکته نیز ضروری به نظر می‌رسد که در مدل آب‌های کم‌عمق، برای عمق آب پیش‌فرض در مخزن نمی‌توان مقدار دقیق صفر را در نظر گرفت و بایستی همیشه یک مقدار کم و نزدیک به صفر فرض نمود ولی به طور کلی این سطوح، خشک در نظر گرفته می‌شوند. بعلاوه این مدل، توانایی مدل‌سازی حالتی که آب از ارتفاع سقوط می‌کند را ندارد و این حالت را به صورت ورودی از کف مدل‌سازی می‌نماید. چراکه در آن از یک روش عمق مثبت استفاده شده است.

در مجموع با توجه به بررسی‌های انجام‌شده از روی شکل‌ها و جداول مربوط به نرم خطا، نتایج حاصل به‌طور مطلوبی با یکدیگر تطابق دارند. از مزیت‌های استفاده از معادلات آب‌های کم‌عمق می‌توان به سرعت بالای حل و سادگی نسبت به معادلات چندبعدی ناپویر-استوکس اشاره نمود که این امر با ذکر زمان اجرای هر مدل در بخش مربوطه، واضح است. این در حالی است که با کوچک‌تر نمودن گام زمانی، مکانی یا خطای قابل‌قبول، این زمان به‌طور قابل‌توجهی افزایش می‌یابد.

11- مراجع

- [1] R. J. LeVeque, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, pp. 64-312, Cambridge: Cambridge university press, 2002.
- [2] E. F. Toro, *Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows*, pp. 15-253, Michigan: John Wiley, 2001.
- [3] E. Audusse, F. Bouchut, M.-O. Bristeau, R. Klein, B. Perthame, A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows, *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 25, No. 6, pp. 2050-2065, 2004.
- [4] Q. Liang, F. Marche, Numerical resolution of well-balanced shallow water equations with complex source terms, *Advances in Water Resources*, Vol. 32, No. 6, pp. 873-884, 2009.
- [5] D. S. Bale, R. J. LeVeque, S. Mitran, J. A. Rossmann, A wave propagation method for conservation laws and balance laws with spatially varying flux functions, *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 24, No. 3, pp. 955-978, 2003.
- [6] D. L. George, Augmented Riemann solvers for the shallow water equations over variable topography with steady states and inundation, *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, No. 6, pp. 3089-3113, 2008.
- [7] C. Bourdarias, S. Gerbi, A finite volume scheme for a model coupling free surface and pressurised flows in pipes, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 209, No. 1, pp. 109-131, 2007.
- [8] H. Mahdizadeh, P. K. Stansby, B. D. Rogers, On the approximation of local efflux/influx bed discharge in the shallow water equations based on a wave propagation algorithm, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 66, No. 10, pp. 1295-1314, 2011.
- [9] H. Mahdizadeh, P. K. Stansby, B. D. Rogers, Flood wave modeling based on a two-dimensional modified wave propagation algorithm coupled to a full-pipe network solver, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 138, No. 3, pp. 247-259, 2011.
- [10] G. Kesserwani, S. Lee, M. Rubinato, J. Shucksmith, Experimental and numerical validation of shallow water flow around a surcharging manhole, *Urban Drainage Modelling*, Vol. 1, pp. 145-154, 2015.
- [11] A. R. Haghighi, Sh. Pakrou, Comparison of the LBM with the modified local Crank-Nicolson method solution of transient one-dimensional nonlinear Burgers' equation, *International Journal of Computing Science and Mathematics*, Vol. 7, No. 5, pp. 459-466, 2016.
- [12] A. R. Haghighi, A. Shadipour, M. Shahbazi Asl, Numerical simulation of micropolar fluid flow through an asymmetric tapered stenosis artery, *Modares Mechanical Engineering Journal*, Vol. 17, No. 12, pp. 33-41, 2017. (in Persian)

¹ Front Wave



Fig. 7 STAR-CD 2D results for the case of water entrance from top edges of the tank with 1m/s speed at 0.5s (zoomed screen at right corner)

شکل 7 نتیجه حاصل از نرم‌افزار استار سی‌دی برای ورود آب به مخزن از بالا و گوشه با سرعت 1 متر بر ثانیه در حالت دوبعدی در 0.5 ثانیه (بزرگنمایی شده برای گوشه سمت راست)

جدول 3 نرم خطای مقایسه معادلات آب‌های کم‌عمق و معادلات ناپویر-استوکس برای حالت ورود آب به مخزن از گوشه‌ها و بالای مخزن

Table 3 Error norm of SWEs and Navier-Stokes equations comparison for the case of water entrance from top edges of the tank

زمان (ثانیه)	تعداد نقاط	نرم خطا
0.5	15841	4.5046×10^{-5}
1	15841	4.0816×10^{-5}
2	15841	4.3851×10^{-5}
4	15841	4.4365×10^{-5}

10- نتیجه گیری

مدل‌سازی عددی یکی از مؤثرترین روش‌ها به‌منظور فهم و بررسی دقیق و صحیح پدیده‌ها در علوم مهندسی می‌باشد. هم‌چنین در علوم مربوط به سیالات نظیر عمران و مکانیک، ضرورت مدل‌سازی عددی به علت وجود پیچیدگی‌های بسیار زیاد و کمبود امکانات لازم، بیشتر احساس می‌گردد. در پژوهش حاضر، به مقایسه مدل‌سازی مخزن با ابعاد مشخص در سه حالت با استفاده از معادلات آب‌های کم‌عمق و معادلات ناپویر-استوکس پرداخته شد. در هر حالت، یک عدد بدون بعد و یک محدوده برای آن تعریف شد به‌طوری‌که اگر مشخصات مخزن دلخواه با استفاده از فرمول معرفی شده برای عدد بی‌بعد، در این محدوده قرار بگیرد، مطابقت بهتری میان نتایج دو مدل برقرار خواهد شد.

همان‌طور که در قسمت مقدمه این مقاله ذکر گردیده است، تاکنون هیچ توسعه‌ای از معادلات آب کم‌عمق برای سقوط جریان آزاد معرفی نگردیده است و مدل‌های معرفی شده صرفاً برای پخش جریان سیال بر روی سطح خشک بیان گردیده و بحث سقوط در آن‌ها به علت ماهیت پیچیده آن برای مدل آب کم‌عمق بررسی نشده است. به همین دلیل نتایج آزمایشگاهی یا مدل دیگر از معادلات ناپویر-استوکس و آب کم‌عمق که بحث سقوط بر روی سطح خشک را مدل نماید، موجود نبوده است. درواقع، هدف در اینجا استفاده از معادلات آب‌های کم‌عمق یک‌بعدی که بسیار ساده‌تر و ارزان‌تر از نظر محاسباتی نسبت به معادلات ناپویر-استوکس می‌باشند، برای مدل‌سازی سقوط جریان آزاد بر روی سطح خشک است.

در حالت‌های ورود آب به مخزن از بالا، بررسی نتایج معادلات ناپویر-استوکس از زمانی که آب به کف کانال می‌رسد آغاز شد چراکه با توجه به برنامه نوشته‌شده بر اساس معادلات آب‌های کم‌عمق، مبدأ شروع حرکت آب از کف کانال می‌باشد. هم‌چنین در حل معادلات ناپویر-استوکس که توسط نرم‌افزار استار سی‌دی صورت گرفت، آب از ارتفاع 0.2 متری و با شتاب جاذبه 9.8066 سقوط کرده و بنابراین دارای یک شتاب اولیه بعد از رسیدن به کف کانال و شروع حرکت خواهد بود درحالی‌که شرایط سقوط در حل معادلات

- [19] A. Harten, J. M. Hyman, Self adjusting grid methods for one-dimensional hyperbolic conservation laws, *Journal of Computational Physics*, Vol. 50, No. 2, pp. 235-269, 1983.
- [20] E. F. Toro, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction*, pp. 124-512, Springer Science & Business Media, 2013.
- [21] B. Einfeldt, On Godunov-type methods for gas dynamics, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 25, No. 2, pp. 294-318, 1988.
- [22] R. J. LeVeque, D. L. George, High-resolution finite volume methods for the shallow water equations with bathymetry and dry states, *Advanced Numerical Models for Simulating Tsunami Waves and Runup*, Vol. 10, pp. 43-73, 2008.
- [23] B. Einfeldt, C.-D. Munz, P. L. Roe, B. Sjögreen, On Godunov-type methods near low densities, *Journal of Computational Physics*, Vol. 92, No. 2, pp. 273-295, 1991.
- [24] H. Mahdizadeh, *Modelling of Flood Waves Based on Wave Propagation: Algorithms with Bed Efflux and Influx Including a Coupled-Pipe Network Solver*, Thesis, University of Manchester, 2011.
- [25] R. J. LeVeque, Balancing source terms and flux gradients in high-resolution Godunov methods: the quasi-steady wave-propagation algorithm, *Journal of Computational Physics*, Vol. 146, No. 1, pp. 346-365, 1998.
- [26] A. Harten, High resolution schemes for hyperbolic conservation laws, *Journal of Computational Physics*, Vol. 49, No. 3, pp. 357-393, 1983.
- [13] S. Moodi, H. Mahdizadeh, M. Azhdary Moghaddam, Numerical Modelling of Water Entrance into a Wet Tank Using a Modified Wave Propagation Algorithm, *Modares Mechanical Engineering Journal*, Vol. 17, No. 4, pp. 168-176, 2017. (in Persian فارسی)
- [14] H. Mahdizadeh, H. Cheharbidi, S. Moodi, Numerical Modelling of Flood Waves Propagation in Sewer Networks using One- and Two-Dimensional Modified HLLC Method, *Modares Mechanical Engineering Journal*, Vol. 17, No. 7, pp. 273-282, 2017. (in Persian فارسی)
- [15] M. Barzgaran, H. Mahdizadeh, S. Pouresmaeil, A Weakly Coupled Scheme for Modelling Bedload Sediment Transport Using an Augmented Riemann Solver, *Modares Mechanical Engineering Journal*, Vol. 17, No. 9, pp. 406-416, 2017. (in Persian فارسی)
- [16] R. J. LeVeque, *High Resolution Finite Volume Methods on Arbitrary Grids via Wave Propagation, Upwind and High-Resolution Schemes*, Eds., pp. 491-518: Springer, 1988.
- [17] R. J. LeVeque, Wave propagation algorithms for multidimensional hyperbolic systems, *Journal of Computational Physics*, Vol. 131, No. 2, pp. 327-353, 1997.
- [18] P. K. Sweby, High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 21, No. 5, pp. 995-1011, 1984.